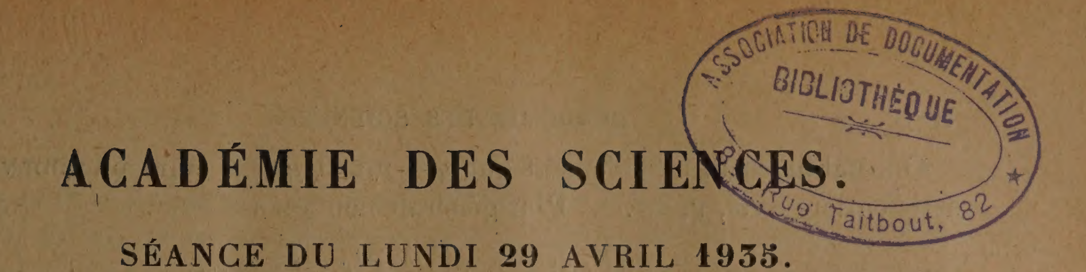


ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 29 AVRIL 1935.

PRÉSIDENCE DE M. PIERRE-AUGUSTIN DANGEARD.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur certaines intégrales singulières.* Note (¹) de M. **Émile Cotton.**

Il s'agit d'intégrales simples ou multiples portant sur une fonction φ dépendant de paramètres, dont la nature sera précisée plus loin; φ devient infinie ou indéterminée en un point isolé du domaine réel d'intégration lorsque les paramètres sont tous nuls. Nous étudierons ces intégrales pour des valeurs des paramètres voisines de zéro (nᵒˢ 2, 3); mais après avoir donné (nº 1) à φ une forme facilitant cette étude.

1. Soit $\varphi = G/F^\alpha$, G, F sont fonctions holomorphes de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$; l'exposant α est positif. Le théorème de factorisation de Cauchy, Weierstrass, Poincaré est supposé applicable à F et à x; soit $P = x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_p$ le polynome correspondant, les a sont des séries entières en $y, z, \ldots$ sans termes constants. On peut d'abord écrire $\varphi = G/F^\alpha = g/P^\alpha$, g étant holomorphe en $x, y, z, \ldots$.

D'après un théorème de M. Goursat (²), il existe un polynome en x,

$$r_0 = b_0 x^{p-1} + b_1 x^{p-2} + \ldots + b_{p-1},$$

dont les coefficients sont holomorphes par rapport aux autres variables $y, \ldots$, tel que la différence $g - r_0$ s'annule identiquement lorsqu'on y remplace x par les fonctions algébroïdes, solutions de $P = 0$.

(¹) Séance du 24 avril 1935.

(²) *Bulletin de la Société mathématique de France*, 36, 1908, p. 209.

On établit ensuite facilement que $g - r_0 = Pg_1$, g_1 étant une nouvelle série entière en $x, y, z, \ldots$. Plus généralement on a

$$g = r_0 + Pr_1 + P^2 r_2 + \ldots + P^s r_s + P^{s+1} g_{s+1};$$

$r_1, r_2, \ldots, r_s$ sont de même nature que r_0, g_{s+1} est une série entière en $x, y, z, \ldots$. Nous écrivons donc

$$\varphi = \frac{G}{F^\alpha} = \frac{g}{P^\alpha} = \frac{r_0}{P^\alpha} + \frac{r_1}{P^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{r_s}{P^{\alpha-s}} + P^{s-\alpha+1} g_{s+1}. \tag{1}$$

Prenons $s < \alpha \leqq s+1$, le dernier terme reste continu pour $x, y, z, \ldots$ voisins de zéro; les autres constituent la *partie critique* de φ (relative à x).

Supposons les *séries* G, F *à coefficients réels*; il en est de même pour $P, g, r_0, \ldots, r_s, g_{s+1}$. Admettons encore que *la fonction* F *est positive ou nulle quand toutes les variables sont réelles et voisines de zéro*, le degré p du polynome P est pair; plaçons-nous dans le cas le plus simple, supposons P *du second degré*. Alors $r_0, \ldots, r_s$ sont du premier degré en x, et $P = (x-\xi)^2 + F_1$; ξ et F_1 holomorphes en $y, z, \ldots$, s'annulent pour $y = z = \ldots = 0$; F_1 est positif ou nul pour les valeurs réelles et voisines de zéro de $y, z, \ldots$.

2. Une intégrale $I(y, z, \ldots) = \int_{-x_1}^{x_1} \varphi(x, y, z, \ldots)\,dx$ (x_1 constante positive) est la somme d'intégrales analogues portant sur les divers termes du second membre de (1). Le dernier donne une intégrale fonction continue de $y, z, \ldots$; il en est de même de l'avant dernier si $\alpha - s < 1/2$; une intégrale portant sur $r_s \log P$ serait aussi continue. Les intégrales restantes s'étudient facilement avec les méthodes de Poincaré [1] et de M. Hadamard [2]. Pour des valeurs réelles des paramètres n'annulant pas F_1, $I(y, z, \ldots)$ *est la somme d'une fonction continue et d'une partie critique de la forme* $G_1/F_1^{\alpha-1/2}$ (G_1 *série entière*); *toutefois si* $\alpha - 1/2$ *est entier il faut, en général, ajouter le produit de* $\log F_1$ *par une autre série entière* G_2.

L'étude d'une intégrale double $J(z, \ldots) = \int\int_\sigma \varphi(x, y, z, \ldots)\,dx\,dy$ étendue à un domaine σ du plan xOy, auquel O est intérieur, se ramène au cas où σ est un rectangle de centre O de côtés parallèles à Ox et Oy; elle se poursuit en appliquant le résultat précédent aux deux intégrations

(1) *Acta mathematica*, 22, 1899, § 4.

(2) *Le Problème de Cauchy*, 1932, p. 184-218.

simples effectuées par rapport à x et à y; on fait sur $F_1(y, z, \ldots)$ des hypothèses analogues à celles concernant $F(x, y, z, \ldots)$.

3. Le théorème de factorisation et la théorie des fonctions implicites permettent de condenser ces hypothèses sur F et F_1 dans l'énoncé suivant : *La fonction holomorphe* $F(x, y, z, \ldots)$ *est positive ou nulle pour les valeurs réelles voisines de zéro de toutes les variables dont elle dépend ; si l'on annule les variables autres que* x *et* y, *l'ensemble des termes du second ordre de la série obtenue* $F(x, y, 0, 0, \ldots)$ *constitue une forme quadratique définie positive.*

Dans ces conditions, si les paramètres $z, \ldots,$ sont réels et voisins de zéro, F considérée comme fonction de x et de y admet un minimum $\mu(z, \ldots)$ fonction holomorphe des paramètres, et μ est positif ou nul.

Pour les valeurs réelles des paramètres voisines de zéro et n'annulant pas μ, *l'intégrale* J *est la somme d'une fonction continue de ces paramètres et d'une partie critique de la forme* $\lambda/\mu^{\alpha-1}$ *où* λ *est fonction holomorphe des paramètres, lorsque* α *est entier, il faut encore ajouter en général un terme* $v \log \mu$, v *étant holomorphe.*

Une proposition analogue s'applique aux intégrales multiples quel que soit le nombre des variables d'intégration.

4. Les forces et les potentiels de simple ou de double couche correspondant à une action élémentaire fonction de la distance r de la forme $d/dr\,(f(r)/r^{\beta})$ (f série entière, $\beta > 0$) conduisent à des intégrales de la forme précédente. Dans ce cas, les axes étant convenablement choisis, on a $F = (x-a)^2 + (y-b)^2 + [\psi(x, y) - c]^2$, ψ série entière commençant par des termes du second ordre. Les paramètres sont a, b, c coordonnées du point d'application de la force. Cette fonction remplit les conditions précédentes. Pour l'étude des discontinuités correspondant au passage à travers la surface portant la couche, on observera que le polynome de factorisation de $\mu(a, b, c)$ relatif à c est $[c - \psi(a, b)]^2$.

Un exemple de tels potentiels est étudié par M. É. Picard dans ses *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la Théorie des équations différentielles* dans la Collection Julia (p. 260).

ASTROPHYSIQUE. — *Les bandes de Vegard-Kaplan dans le spectre du ciel nocturne*. Note [1] de MM. **Jean Cabannes** et **Jean Dufay**.

I. Du mois d'août 1933 au mois de février 1935, nous avons réuni plus de 100 clichés concernant le spectre du ciel nocturne photographié au Pic du Midi (Pyrénées), à Montpellier, Saint-Genis-Laval (Rhône) et Forcalquier (Haute-Provence). Tous montrent le spectre d'émission complexe que nous avons précédemment décrit [2]. Les longueurs d'onde des radiations émises ont été mesurées au comparateur sur 13 clichés et, après enregistrement au microphotomètre, sur 33 clichés. Les listes de longueurs d'onde seront publiées dans un autre recueil.

II. Parmi les radiations les plus intenses et les plus caractéristiques se trouvent les deux raies d'origine inconnue que Lord Rayleigh découvrit pendant l'hiver 1922-1923 et auxquelles il attribua d'abord les longueurs d'onde 4435 et 4220 Å. Ce sont celles dont nous avons suivi pendant un an les variations d'intensité [3]. Elles sont communément désignées par X_1 et X_2. Plusieurs hypothèses ont été faites pour expliquer leur origine. Suivant la dernière opinion de Kaplan [4], il faudrait voir en X_1 et X_2 deux des bandes de la *molécule d'azote* récemment découvertes au laboratoire par Vegard et Kaplan et classées par Herzberg. Leurs fréquences en cm^{-1} sont données par la formule

$$\nu = 49974,4 + (1446,46\,v' - 13,93\,v'^2) - (2345\,v'' - 14,445\,v''^2).$$

La première parenthèse montre que l'état initial est l'état métastable $A(^3\Sigma)$; si d'autre part on fait $v''=1$ dans la seconde parenthèse, on trouve $2331\,cm^{-1}$, c'est-à-dire la fréquence Raman de l'azote; l'état final est donc l'état normal $X(^1\Sigma)$ de la molécule.

III. Il était intéressant de chercher à contrôler cette hypothèse en utilisant l'ensemble de nos observations sur le ciel nocturne. Nous avons ainsi constaté qu'un grand nombre de radiations du ciel étaient très voisines des bandes de Vegard-Kaplan. *L'accord deviendrait encore plus satisfaisant si l'on diminuait de* $21\,cm^{-1}$ *le terme constant de la formule d'Herzberg*. Dans

---

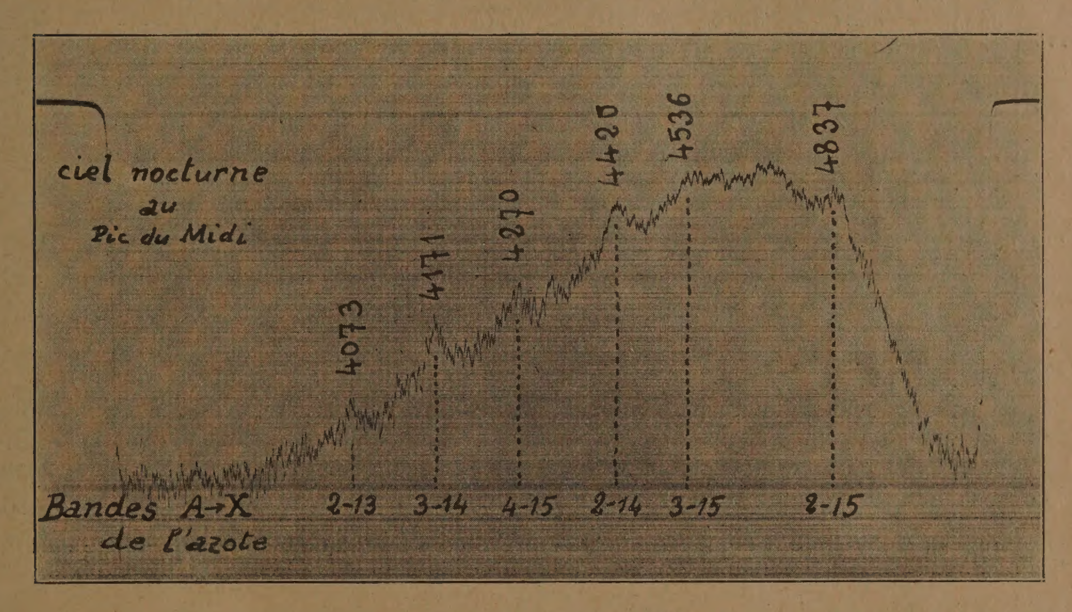
(1) Séance du 24 avril 1935.

(2) *Comptes rendus*, **198**, 1934, p. 306.

(3) *Comptes rendus*, **200**, 1935, p. 878.

(4) *Nature*, **135**, 1935, p. 229.

le tableau ci-après, nous donnons les longueurs d'onde des bandes A → X tirées de la formule d'Herzberg. Au-dessous de chaque bande, nous avons indiqué la radiation du ciel qu'on peut lui faire correspondre, avec son intensité numérotée de 0 à 5. Ce tableau met en évidence la présence dans le ciel des bandes A → X appartenant aux suites $v'' - v' = 10, 11, 12, 13$ et dont le quantum de vibration initial est voisin de 2. *Les principales bandes du ciel de l'intervalle* 3500-5000 Å *reçoivent ainsi une explication satisfaisante et qui paraît définitive pour beaucoup d'entre elles*. La figure 1 reproduit l'enregistrement d'un de nos spectres : on y reconnaît 6 des bandes de Vegard-Kaplan parmi les radiations les plus intenses du ciel. En utilisant



les mesures de Vegard ([1]), nous retrouvons les bandes A → X dans les spectres des aurores boréales, mais les bandes du deuxième système positif de N^2 et celles du système négatif de N^2_+ y ont une intensité telle qu'elles masquent certaines des bandes A → X.

IV. La présence établie par l'un de nous ([2]) du premier système positif des bandes de l'azote dans le ciel nocturne montre qu'un grand nombre de molécules N^2 de la haute atmosphère se trouvent à l'état métastable A. La vie moyenne de ces molécules métastables est longue, mais, dans la haute atmosphère, étant donné la rareté des chocs moléculaires, les retours

([1]) *Geofysiske Publikasjoner*, Oslo, 10, n° 4, 1933, p. 1-61.

([2]) J. Cabannes, *Journal de Physique*, 5, 1934, p. 601.

spontanés à l'état normal avec émission des bandes *interdites* A → X deviennent possibles. On retrouve ici un phénomène analogue à celui par lequel Bowen a expliqué les raies des nébuleuses et Mc Lennan la présence dans le ciel et les aurores des raies interdites 5577 et 6303 Å de l'atome d'oxygène.

v'.	$v''=10$.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.
0...	3600	3886	4216	4601	5055	....	....	....	....
	3603(V)	3889 (1)	4220 (1)	4603 (?)	5062 (2)	....	....	....	....
1...	3424	3681	3976	4316	4714	5185	....	....	....
	3426 (2)	3685(V)	3979 (1)	4317 (1)	4719 (1)	5185 (0)	....	....	....
2...	....	3500	3765	4069	4421	4833	5321	....	....
	....	3501 (1)	3769(V)	4073 (3)	4425 (5)	4838 (4)	5324 (0)	....	....
3...	....	....	3580	3853	4167	4531	4957	....	....
	....	....	3582 (1)	3855 (5)	4171 (5)	4536 (3)	4962 (0)	....	....
4...	....	....	....	3663	3945	4270	4647	5088	....
	....	....	....	3669 (?)	3950 (2)	4270 (4)	4650 (1)	5083 (2)	....
5...	....	....	....	....	....	4042	4378	4768	....
	....	....	....	....	....	4046 (2)	4382 (?)	4768 (1)	....
6...	....	....	....	....	....	....	4144	4491	....
	....	....	....	....	....	....	4144 (2)	4493 (1)	....
7...	....	....	....	....	....	....	3937	4249	4610
	....	....	....	....	....	....	3936 (2)	4252 (1)	4616 (2)
8...	....	....	....	....	....	....	....	....	4361
	....	....	....	....	....	....	....	....	4363 (1)

(La lettre V indique une radiation observée par Vegard dans les aurores boréales.)

BIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Sur des akènes d'apparence déficiente chez le Pissenlit.* Note (¹) de M. **Lucien Daniel**.

Le Pissenlit (*Taraxacum Dens leonis*) fait partie du petit groupe des Angiospermes apogames chez lesquelles l'embryon ne naît pas d'une cellule haploïde, mais d'un élément resté diploïde par suite de l'absence de la réduction chromatique. La cellule-mère de ses macrospores subit une seule bipartition et se prépare comme pour une réduction, mais les deux cellules-filles conservent chacune 26 chromosomes comme la cellule-mère. La supérieure écrase l'inférieure et devient le sac embryonnaire. L'embryon du Pissenlit est donc comparable à un bourgeon ordinaire, à un caïeu ou à un propagule.

(¹) Séance du 24 avril 1935.

Si, comme on l'a prétendu, le croisement sexuel est la source unique de la variation chez les êtres vivants, les changements de milieux et les opérations d'horticulture, qui déterminent des déséquilibres excessifs de nutrition, ne peuvent introduire chez une variété quelconque de Pissenlit apogame des caractères nouveaux. Or il est facile de constater qu'à la suite de la décapitation de la racine principale au voisinage de la rosette, les pousses de remplacement qui apparaissent portent souvent des feuilles modifiées à des degrés divers et que ces modifications se reproduisent plus ou moins marquées au cours des années suivantes. On pourrait objecter qu'il s'agit de pieds ayant subi un croisement, le pollen ayant par hasard repris ses facultés germinatives et rencontré une cellule exceptionnellement haploïde chez la macrospore.

Pour éliminer cette cause d'erreur, j'ai semé des graines de Pissenlit amélioré, à feuilles géantes, dressées et dentées de façon caractéristique, qui, dans les conditions ordinaires, se maintient constant. J'ai choisi dix pieds de troisième génération aussi semblables que possible; j'ai coupé leurs feuilles à la base, puis après les avoir arrachés, je les ai replantés serrés côte à côte, la rosette enfouie dans le sol et la racine en l'air. A la suite de ce renversement de la polarité, des bourgeons de remplacement sont apparus vers le milieu de la racine principale et ont, conformément à la loi de niveau, donné de nouvelles rosettes à la surface du sol. Les feuilles de celles-ci présentèrent des changements notables dans leur forme générale qui devint plus large et moins dentée et dans leur disposition mosaïque par rapport à la lumière solaire.

Chez ces dix exemplaires apparurent des inflorescences normales. Sur huit capitules d'âges différents, dont les involucres étaient encore complètement fermés et contenaient, par conséquent, des organes sexuels non arrivés à maturité, je sectionnai avec un rasoir les inflorescences au-dessus des anthères et des stigmates jeunes. De cette façon, j'empêchais sûrement tout croisement sexuel de se produire. Des akènes se formèrent pourtant, sauf sur deux pieds sectionnés trop près des ovaires dont le sommet fut légèrement entamé, ce qui les fit dessécher. Les akènes des six exemplaires qui avaient poursuivi leur développement furent décolorés, plissés et d'autant plus ratatinés que l'opération avait été pratiquée sur des capitules plus jeunes. En voyant leur aspect déficient, je crus qu'ils ne germeraient pas; je les semai quand même en serre et j'eus la surprise de les voir presque tous lever. Une cinquantaine de pieds nouveaux portaient des cotylédons panachés de blanc sur fond vert; les autres avaient leurs cotylédons entiè-

rement verts. Plantés comparativement en pleine terre, ils devinrent vigoureux comme la race mère primitive, et les feuilles ne furent pas panachées.

Laissés en place cette année, ils ont fourni pour la plupart de curieuses variations dans la forme du limbe des feuilles, dans la disposition, la forme, le nombre et les dimensions relatives des dents (*fig.* 1). Tandis que, chez quelques exemplaires, toutes les feuilles gardaient les caractères du type, chez d'autres elles devenaient spatulées ou présentaient à leur extrémité un lobe arrondi au lieu d'être pointu. Tantôt toutes les feuilles d'un



Fig. 1. Fig. 2.

Fig. 1. Formes diverses de la feuille chez des pieds de semis du Pissenlit apogame. — Fig. 2. Deux pieds, l'un à feuilles de formes variées et l'autre à feuilles toutes spatulées, presque sans dents.

même individu étaient spatulées et larges; tantôt elles étaient de formes différentes, les unes étroites et fortement dentées, les autres larges et à dents réduites ou nulles (*fig.* 2).

Vu les mesures prises pour empêcher tout croisement sexuel, les akènes étaient forcément apogames. Donc les variations des jeunes plants de semis sont la conséquence des déséquilibres excessifs de nutrition (1) causés par le changement de polarité de la racine et son sectionnement chez leur ancêtre. Dans l'apogamie, comme dans tous les autres modes de multiplication végétative, la plante ne conserve donc point, ainsi qu'on l'a

(1) Lucien Daniel, *Ann. des Sc. nat.*, *Botanique*, 8e série, 8, 1898, p. 66; *Bull. de la Soc. scient. et méd. de l'Ouest*, 11, 4e trim. 1902, p. 2 et suiv. du tiré à part.

affirmé (¹) *toutes ses propriétés, même les plus délicates, telle qu'elle a été formée dans l'œuf.* La réduction chromatique et l'amphimixie ne commandent pas toute l'hérédité.

CORRESPONDANCE.

La **Conférence Ibère-américaine**, réunie à Madrid, adresse ses condoléances à l'occasion du décès de M. *L. Joubin*.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° Ministère de l'Éducation nationale. *La Bibliothèque nationale pendant les années* 1930-1932. *Rapport à M. le Ministre de l'Éducation nationale.*

2° Dimitri P. Riabouchinsky. *Thirty Years of Theoretical and Experimental Research in Fluid Mechanics.* (Présenté par M. L. Lecornu.)

LOGIQUE DES MATHÉMATIQUES. — *Sur les conditions de variance des propositions.* Note de M. **Georges Bouligand**, présentée par M. Élie Cartan.

La logique étant établie, si l'on examine les théories mathématiques familières en vue d'aboutir à des caractères généraux des propositions, on rencontre aussitôt le *domaine de causalité* d'une proposition ou d'un système de propositions. Les prémisses ayant été fixées, soit une proposition P d'énoncé préalablement formulé. Supposons P vraie pour un choix des objets qu'elle met en relation. Les modifications menant ainsi d'un cas d'exactitude à un nouveau forment une famille contenant, avec une modification déterminée, la modification inversée et, avec deux modifications, leur résultante. Une telle famille est donc un *groupe*, qui s'introduit lorsqu'on cherche les conditions les plus larges de validité de P; c'est pourquoi

---

(¹) Van Tieghem, *Traité de Botanique*, 1, 1891, p. 970.

je l'ai nommé le *domaine de causalité de* P [1]. Le passage d'une proposition isolée à un système de propositions est immédiat ; car les éléments communs à plusieurs groupes forment un nouveau groupe.

L'idée de prémisses immuables étant écartée, il se peut que P garde un sens et continue à être vraie par élargissement des prémisses. Par exemple, si P énonce, dans l'espace euclidien, la constance de longueur d'un segment qui demeure orthogonal aux déplacements de ses extrémités, P peut se transférer sans altération dans une géométrie riemannienne de métrique arbitraire, les géodésiques remplaçant les droites. La notion du domaine de causalité de P subsiste alors tout en se déployant sur une infinité de systèmes de géométrie (en général, non holonomes).

Poursuivant les considérations de variance invoquées ci-dessus, on rencontre, pour de larges classes de propositions, un nouveau caractère : le fait qu'elles sont ou *stables* ou *instables* [2]. Admettons les conditions suivantes : dans un champ de prémisses défini, soit le théorème ($H_0 \rightarrow C_0$) dont l'hypothèse H_0 et la conclusion C_0 sont des assertions soumettant certains objets à des conditions précises; la flèche symbolise l'implication. Supposons qu'on ait la notion d'une assertion H_ε arbitrairement voisine de H_0 et d'une assertion C_η arbitrairement voisine de C_0, ces voisinages pouvant être appréciés par les nombres positifs ε, η ou *modules de déplacement* (de l'hypothèse, de la conclusion). Alors, si pour toutes modifications des objets considérés, l'évanescence de ε requiert celle de η [3], le théorème sera *stable;* si l'évanescence de ε se concilie par contre avec une famille de modifications desdits objets laissant η surpasser un nombre positif fixe, le théorème sera *instable*.

On prévoit que les manières de définir ε, η pourront influencer le caractère stable ou instable du théorème.

Soit maintenant X une *proposition ambiguë*, c'est-à-dire susceptible d'être tantôt vraie, tantôt fausse, à l'exemple des énoncés suivants dans l'espace usuel E_3 : trois points déterminent un seul plan; les surfaces d'annulation de trois polynomes en x, y, z, de degrés m, n, p à coefficients arbi-

---

(1) G. Bouligand, *Rev. gén. des Sc.*, 40, 1930, p. 42; 45, 1934, p. 322; *La causalité des théories mathématiques* (fasc. 184 des *Act. sc. et Ind.*, Paris, 1934, p. 17-20).

(2) G. Bouligand, *Bull. Ac. Roy. des Sc. de Belgique*, 5e série, 21, 1935, p. 277-282.

(3) On envisage ici toutes modifications possibles à partir d'un cas d'exactitude *quelconque* du théorème initial et l'on suppose qu'on puisse écrire *uniformément* $\eta < f(\varepsilon)$, la fonction positive f étant infiniment petite avec ε.

traires, ont en commun *mnp* points distincts, réels ou imaginaires, etc. Supposons que la valeur logique de X soit fixée par la détermination d'un point M dans un certain espace S : cette valeur s'exprime alors, dans cet espace, par la fonction caractéristique de l'ensemble ponctuel V sur lequel X est vraie. Un cas important est celui où le seul déplacement admis de l'hypothèse correspond dans S, supposé *distanciable*, au passage du point M à un autre point M'. Le module ε est alors la distance MM'. La conclusion consiste en ce que X est vraie ou non vraie. Si S est de plus *compact en soi*, et si S — V est un ensemble fermé dépourvu de point intérieur, en chaque point M de l'ensemble V, l'énoncé : X *est vraie*, sera stable (stabilité *de permanence*, ou à conclusion fixe) et l'énoncé : X *n'est pas vraie*, valable sur S — V, sera instable. C'est justement ce qui a lieu dans la recherche des points d'intersection de trois surfaces algébriques, les coordonnées homogènes qui fixent un point de S étant les coefficients des polynomes correspondants. La possibilité de remarques analogues s'applique au premier exemple, ainsi qu'à des problèmes de détermination de courbes ou de surfaces algébriques.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur la corrélation au sens des modes.* Note de M. **Carlos E. Dieulefait**, présentée par M. Émile Borel.

1. Soit $f(x, y)$ l'expression d'une surface de fréquences et soient

$$\int f(x, y)\, dy = \varphi(x) \qquad \text{et} \qquad \int f(x, y)\, dx = \rho(y)$$

les fonctions marginales. Les intégrales sont supposées étendues au domaine de variation des variables (x, y).

Soient

$$\mu_{s,j} = \iint f(x, y)\, x^s y^j\, dx\, dy$$

les moments doubles. Pour $s + j \leqq 4$ et $i, k \leqq 4$ dans $\mu_{i,0}$, $\mu_{0,k}$, on a le développement approché

$$(1) \qquad f(x, y) = \varphi(x)\rho(y)\,[1 + Axy + Bx\,T_2(y) + Cy\,T_2(x) + D\,T_2(x)\,T_2(y)]$$

avec

$$T_2(x) = x^2 - \sigma_x\sqrt{\beta_{10}}\,x - \sigma_x^2, \qquad T_2(y) = y_2 - \sigma_y\sqrt{\beta_{01}}\,y - \sigma_y^2,$$

$$\mathbf{A} = \frac{r}{\sigma_x\sigma_y}, \qquad \mathbf{B} = -\frac{\sigma_x}{\mu_{20}\mu_{02}}\,\frac{q_{12} - r\sqrt{\beta_{01}}}{\beta_{02} - \beta_{01} - 1},$$

et

$$C = \frac{\sigma_y}{\mu_{20}\mu_{02}} \frac{q_{21} - r\sqrt{\beta_{10}}}{\beta_{20} - \beta_{01} - 1}, \qquad D = \frac{1}{\mu_{20}\mu_{02}} \frac{q_{22} - q_{21}\sqrt{\beta_{01}} - q_{12}\sqrt{\beta_{10}} + r\sqrt{\beta_{10}\beta_{01}} - 1}{(\beta_{20} - \beta_{10} - 1)(\beta_{02}\beta_{01} - 1)},$$

étant

$$q_{s,j} = \frac{\mu_{sj}}{\mu_{20}^{\frac{s}{2}}\mu_{02}^{\frac{j}{2}}}, \qquad \beta_{0,1} = \frac{\mu_{03}^2}{\mu_{02}^3}, \qquad \beta_{0,2} = \frac{\mu_{04}}{\mu_{02}^2}, \qquad \sigma_y^2 = \mu_{2,0},$$

pour maintenir les notations répandues de K. Pearson.

2. Pour Galton-Pearson, la ligne de régression $\overline{y}_x$ est

$$\overline{y}_x = \frac{\int f(x, y) y \, dy}{\varphi(x)} = F(x).$$

Au point de vue biométrique, les valeurs types ou des modes des y liées aux x sont données par la fonction

$$(2) \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Indiquons par $\overline{y}_{m_x} = M(x)$ sa solution explicite. Si $f(xy) = \varphi(x)\Phi_x(y)$ et si $\Phi_x(y)$ est une fonction symétrique : $F(x) = M(x)$. C'est ce qui arrive par exemple pour la surface de Bravais, mais pas en général. On doit à l'influence de Quetelet, qui croyait à l'université de la loi de Laplace-Gauss, la préférence pour $F(x)$ au lieu de $M(x)$. Le choix s'imposa aussi jusqu'ici par manque d'une expression mathématique générale des surfaces de fréquences que nous avons donnée [1] et dont la formule (1) n'est qu'un développement approché, adapté aux recherches statistiques.

L'égalité (2) appliquée à l'expression (1) nous donne

$$(3) \qquad \frac{Ax + C\,T_2(x) + [Bx + D\,T_2(x)]T_2'(y)}{1 + Axy + Bx\,T_2(y) + Cy\,T_2(x) + D\,T_2(x)T_2(y)} = -\frac{\rho'(y)}{\rho(y)},$$

mais

$$(4) \qquad \frac{\rho'(y)}{\rho(y)} = -\frac{\gamma_0 + y}{\delta_0 + \delta_1 y + \delta_2 y^2}$$

est l'équation de K. Pearson, qui détermine la marginale $\rho(y)$ dans nos mêmes approximations; car les paramètres $\gamma_0 = \delta_1$, δ_0 et δ_2 dépendent des μ_{02}, μ_{03} et μ_{04}. Éliminant $\rho'(y)/\rho(y)$ entre les formules (3) et (4) et faisant dis-

---

[1] Voir C. Dieulefait, *Biometrika*, **26**, Parts III et IV, 1934, p. 379.

paraître les dénominateurs, on arrive à une expression telle que

$$R(x)y^3 + S(x)y^2 + U(x)y + V(x) = 0;$$

d'où l'on déduit $\overline{y}_{m_x} = M(x)$ par des procédés algébriques, ce qui donne la solution de l'équation générale (2).

3. L'adoption de $M(x)$ au lieu de $F(x)$ oblige à introduire un nouveau coefficient de corrélation au sens des modes. On pourra prendre

$$\lambda^2 y_{m_x} = 1 - \frac{\Sigma^2 y_{m_x}}{\sigma_y^2 - 2\int \varphi(x)\,\overline{y}_x \overline{y}_{m_x}\,dx + \mathrm{Max}\left(\overline{y}_{m_x}^2\right)}$$

avec

$$\Sigma^2 y_{m_x} = \iint f(xy)\,[y - M(x)]^2\,dx\,dy.$$

Pour $\lambda^2 y_{m_x} = 1$ on a une relation fonctionnelle entre x, y. Pour $\lambda^2 y_{m_x} = 0$, il s'ensuit que $\overline{y}_{m_x} = \overline{y}_m$, $\overline{y}_m$ étant le mode de $\rho(y)$, c'est-à-dire que, dans ce cas, il n'y a pas de corrélation au sens des modes.

4. On peut ainsi donner un coefficient de corrélation au double sens. Tel est par exemple

$$L^2 y_x = 1 - \frac{\Sigma^2 y_{m_x}}{\sigma_y^2 + \mathrm{Max}\left(\overline{y}_x - \overline{y}_{m_x}\right)^2},$$

puisque si $L^2 y_x = 0$, il s'ensuit que $\overline{y}_x = \overline{y}_x = 0$ et $\overline{y}_{m_x} = \overline{y}_m$; c'est-à-dire : absence de corrélation dans les deux sens.

5. L'application de ces principes devient très simplifiée si, au lieu du développement général (1), on adopte pour $\varphi(x)$ et $\rho(y)$ les expressions données par K. Pearson dans son répertoire des courbes de fréquences.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur quelques inégalités pour les polynomes dont les premiers coefficients sont donnés.* Note de M. J. GERONIMUS.

1. Soit

$$G(\theta) = \mathrm{P.R.} \sum_{k=0}^{n} \overline{c}_k\, e^{i(n-k)\theta}$$

un polynome trigonométrique d'ordre $\leq n$ dont les premiers coefficients c_0, c_1, ..., c_s sont donnés.

On a l'inégalité suivante :

$$(1) \qquad L(G) = \int_0^{2\pi} |G(\theta)|\,d\theta \geq 4|c_s|, \qquad s \leq \left[\frac{2n-1}{3}\right],$$

l'égalité n'ayant lieu que pour le polynome

$$(2)\qquad G^\star(\theta)=[A+\text{P.R.}\,\bar{c}_s z^{n-s}]\left\{1+2\,\text{P.R.}\sum_{k=0}^{s-1}\frac{\bar{c}_k}{\bar{c}_s}z^{s-k}\right\}\qquad (z=e^{i\theta})$$

avec $A=0$ et sous la condition que le polynome entre accolades ne change pas de signe.

Si notre polynome est non négatif, la valeur minimale correspondante de $L(G)$ sera $\pi/2$ fois plus grande que (1) et le polynome réalisant ce minimum est encore $G^\star(\theta)$ avec $A=|c_s|$.

Si $s=1$, c'est-à-dire si c_0 et c_1 sont donnés, on a

$$(3)\qquad L(G)=\int_0^{2\pi}|G(\theta)|\,d\theta\geqq\begin{cases}4|c_1| & (|c_1|\geqq 2|c_0|),\\ 4|c_0|\left\{1+\dfrac{1}{4}\left|\dfrac{c_1}{c_0}\right|^2\right\} & (|c_1|\leqq 2|c_0|).\end{cases}$$

Pour le polynome non négatif, les valeurs minimales correspondantes de $L(G)$ seront $\pi/2$ fois plus grandes que (3).

2. Soit

$$Q(x)=\sum_{k=0}^{n}\sigma_k x^{n-k}$$

un polynome de degré $\leqq n$ dont les premiers coefficients $\sigma_0,\ \sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_s$ sont donnés.

Si n augmente indéfiniment tandis que s reste fini, on a les inégalités asymptotiques (en supposant que les coefficients donnés sont tous de même ordre)

$$(4')\qquad L(Q)=\int_{-1}^{1}|Q(x)|\,dx\geqq\frac{|\sigma_0|\,n^{\frac{s}{2}}}{2^{n-1}\,\dfrac{s}{2}\,!}\qquad (s\text{ pair}),$$

$$(4'')\qquad L(Q)=\int_{-1}^{1}|Q(x)|\,dx\geqq\begin{cases}\dfrac{|\sigma_1|\,n^{\frac{s-1}{2}}}{2^{n-2}\,\dfrac{s-1}{2}\,!} & (|\sigma_1|\geqq|\sigma_0|)\\ \dfrac{|\sigma_0|\,n^{\frac{s-1}{2}}}{2^{n-1}\,\dfrac{s-1}{2}\,!}\left\{1+\left(\dfrac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^2\right\} & (|\sigma_1|\leqq|\sigma_0|)\end{cases}\qquad (s\text{ impair}).$$

Si le polynome est non négatif sur le segment $(-1,+1)$, les valeurs minimales correspondantes de $L(Q)$ seront $\pi/2$ fois plus grandes que $(4')$ et $(4'')$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une extension de la condition de convergence des théorèmes inverses de sommabilité*. Note de M. V. **Avakumović**, présentée par M. Jacques Hadamard.

M. Karamata a montré (¹) que la condition de convergence des théorèmes inverses de sommabilité relatifs aux intégrales de Laplace $\int_0^\infty e^{-\sigma t}\, d\{A(t)\}$ peut prendre la forme suivante :

$$(K_\rho) \qquad \rho(x')A(x') - \rho(x)A(x) > -w(\lambda)\rho(x) \quad \text{pour tout } 0 < x \leqq x' \leqq \lambda x,$$

où la fonction $\rho(x)$ est assujettie à être non décroissante et à satisfaire en outre à certaines conditions supplémentaires. J'ai montré ensuite, dans une Note actuellement sous-presse (Académie Yougoslave), que la monotonie de $\rho(x)$ peut être remplacée par la condition plus générale

$$(\text{R-O}) \qquad 0 < m \leqq \frac{\rho(x')}{\rho(x)} < M \quad \text{pour tout } 0 < x \leqq x' \leqq \lambda x,$$

tout en ayant conservé encore quelques conditions secondaires [ces conditions étant, en particulier, remplies lorsque $\rho(x)$ est à croissance régulière]. Or le théorème reste valable sous la seule hypothèse que $\rho(x)$ appartienne à *la classe* R-O [c'est-à-dire satisfasse à la condition (R-O)], et l'on peut démontrer en premier lieu le

Théorème O. — *Soit* $A(t)$ *à variation bornée pour* $t > 0$, *et soit*

$$J(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma t}\, d\{A(t)\} = \sigma \int_0^\infty e^{-\sigma t} A(t)\, dt$$

convergent pour $\sigma > 0$; *de*

$$(1) \qquad J(\sigma) = O(1), \qquad \sigma \to 0,$$

résulte

$$(2) \qquad A(t) = O(1), \qquad t \to \infty,$$

toutes les fois que la condition de convergence (K_ρ) *est remplie avec une fonction quelconque* $\rho(x)$ *de la classe* R-O.

(¹) *Publ. Math. de l'Univ. de Beograd*, **2**, 1933, p. 1-16.

En second lieu, la reproduction de la démonstration de M. Karamata donne, une fois le théorème O établi, le

THÉORÈME o. — *S'énonce comme le théorème* O, *en y remplaçant dans* (1) *et* (2) O *par* o *et la condition* (K_ρ) *par*

$$\liminf_{x=\infty} \min_{x \leqq x' \leqq \lambda x} \frac{\{\rho(x')A(x') - \rho(x)A(x)\}}{\rho(x)} > -w(\lambda) \to 0 \quad \text{lorsque } \lambda \to 1.$$

La marche de la démonstration du théorème O est, en principe, la même que celle suivie par M. Karamata dans ([1]). Toutefois, on est obligé d'une part, de remplacer, dans une partie de la démonstration, la relation (1) par

$$(3) \qquad I(\sigma) = \sigma \int_0^\infty e^{-\sigma t}(1 - e^{-\sigma t})^n A(t)\, dt = O(1), \qquad \sigma \to 0,$$

et d'autre part, en posant

$$(4) \qquad A^*(t) = \max_{t \geqq t' \geqq 0} \{-A(t')\}$$

de prouver que $A^*(t)$ appartient à la classe R-O lorsque $A(t)$ satisfait à la condition (K_ρ). En se servant alors, d'une part de la relation

$$(5) \qquad m\left(\frac{y}{x}\right)^{-k} < \frac{\rho(y)}{\rho(x)} < M\left(\frac{y}{x}\right)^{K} \qquad \text{pour tout } y \geqq x,$$

équivalente à (R-O), et d'autre part de l'inégalité

$$(6) \quad \rho(y)A(y) - \rho(x)A(x) > -w(\lambda)\rho(x) - \frac{w(\lambda)}{m \log \lambda} \int_x^y \frac{\rho(t)}{t}\, dt \quad \text{pour tout } y \geqq x,$$

équivalente à la condition (K_ρ), la démonstration s'effectue par la bissection des intégrales $J(\sigma)$ et $I(\sigma)$ de la manière suivante ([2]) :

a. En posant

$$J(\sigma) = \sigma \int_0^T e^{-\sigma t} A(t)\, dt + \sigma \int_T^\infty e^{-\sigma t} A(t)\, dt = J_1 + J_2 \qquad \text{avec } \sigma T = 1,$$

puis en minorant J_1 par (4) et J_2 par (6), on obtient, en tenant compte de (1) et (5),

$$(7) \qquad A(T) < C\,A^*(T) + C', \qquad C > 0, \quad C' > 0$$

ne dépendant pas de T.

([1]) *Math. Zeits.*, 37, 1933, p. 582-588.

([2]) Le détail du calcul est à peu de choses près celui de ma Note antérieurement citée.

b. En posant

$$I(\sigma) = \int_0^T + \int_T^\infty = I_1 + I_2 \qquad \text{avec } \sigma T = a,$$

puis en majorant I_1 par (6) et I_2 d'abord par (7) [ensuite par l'inégalité (5) relative à $A^*(t)$], on obtient, d'après (3) et (5),

$$(8) \qquad -A(T) < \frac{c}{a} A^*(T) + c(a) \qquad \text{avec } c > 0, \quad c(a) > 0$$

et indépendants de T.

La fonction $A^*(t)$ étant, d'après (4), la plus petite fonction non décroissante $\geqq -A(t)$, il s'ensuit, d'après (8), que

$$A^*(t) \leqq \frac{c}{a} A^*(t) + c(a),$$

c'est-à-dire $A^*(t) = O(1)$ (car a peut toujours être choisi $> c$); il en résulte, d'après (7) et (8), l'affirmation (2).

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur un problème de M. Carleman concernant les fonctions analytiques.* Note de M. **Szolem Mandelbrojt**, présentée par M. Jacques Hadamard.

Nous avons traité ([1]) le problème suivant, posé par M. Carleman :

A. *Quelles conditions nécessaires et suffisantes faut-il imposer à la suite* $\{m_n\}$, *pour que toute fonction* $f(x)$ *vérifiant les inégalités* $|f^{(n)}(x)| < m_n$, $(a \leqq x \leqq b;\ n = 0, 1, \ldots)$, *soit analytique ?*

Dans la Note citée, nous avons envisagé ce problème comme cas particulier d'un problème plus général, également posé par M. Carleman, mais nous ne l'avons alors résolu que pour les fonctions périodiques. Dans les lignes qui suivent, nous donnons la réponse complète à la question A, sans imposer aucune restriction aux fonctions envisagées.

L'idée essentielle qui permet de résoudre ce problème consiste à remplacer la fonction $T(r)$ qui figure dans la Note précédente par la fonction $S(r)$ qui est le maximum de r^n/m_n lorsqu'on ne donne à n que des valeurs entières *non supérieures à r.* Nous démontrons notamment le théorème suivant.

([1]) *Comptes rendus*, 200, 1935, p. 1272. Dans cette Note, à la page 1272, *au lieu de* $\overline{m}_n$ est l'ordonnée..., *lire* $\log \overline{m}_n$ est l'ordonnée....

Théorème I. — *La condition nécessaire et suffisante, pour que toute fonction vérifiant les inégalités*

(1) $$|f^{(n)}(x)| < m_n \qquad (a \leqq x \leqq b;\ n = 0, 1, \ldots)$$

soit analytique dans l'intervalle fermé (a, b), *est qu'il existe une constante position* α, *telle que, pour* $r > r_0$, *on ait :*

(2) $$S(r) = \max_{0 \leqq n \leqq r} \frac{m_n}{r^n} > e^{\alpha r} \qquad (\alpha > 0,\ r > r_0).$$

Cette condition est aussi nécessaire et suffisante pour que toute fonction de la classe $C_{\{m_n\}}$ soit analytique.

Démonstration. — 1° *La condition* (2) *est nécessaire.* — Posons $a = -1/2$, $b = 1/2$. En posant

$$T_n(x) = \arccos x = \frac{1}{2}\left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n\right],$$

on voit d'après la formule de Cauchy

$$T_n^{(q)} = \frac{q!}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{T_n(z)\,dz}{(z - x)^{q+1}} \qquad (1 \leqq q \leqq n),$$

où $(-1/2 \leqq x \leqq 1/2)$, et où C_R est l'ellipse de foyers -1, 1 et de demi-somme d'axes égale à $R = 1 + q/n$, que

$$|T_n^{(q)}(x)| < h k^q n^{q+1} \left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}\right) \qquad \text{avec} \quad h = \frac{8e}{\sqrt{3}}, \qquad k = 4\sqrt{\frac{e}{3}}.$$

Il en résulte que la fonction

$$\varphi(x) = C \sum_{p=1}^{\infty} \frac{T_{3p}(x)}{p^2 S(3kp)} \qquad \left(C = \frac{1}{3h \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}}\right)$$

vérifie les inégalités (1) lorsque $-1/2 \leqq x \leqq 1/2$. On a, en effet, en vertu de la définition même de $S(r)$,

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leqq C \sum_{p \geqq \frac{q}{3}}^{\infty} \frac{|T_{3p}^{(q)}(x)|}{p^2 S(3kp)} \leqq C \frac{m_q}{(3k)^q} \sum_{p \geqq \frac{q}{3}} \frac{hk^q (3p)^{q+1}}{p^{q+3}} \leqq m_q.$$

Si toute fonction vérifiant (1) est analytique, la fonction $\varphi(x)$ l'est

aussi; par conséquent les fonctions

$$F(\theta) = \varphi(\cos\theta) = C\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos 3p\theta}{p^3 S(3kp)}, \qquad \Phi(\psi) = C\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos p\psi}{p^3 S(3kp)} = \sum_{p=1}^{\infty} d_p \cos p\psi$$

sont analytiques respectivement dans les intervalles $\pi/3 \leqq \theta \leqq 2\pi/3$ et $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$. Il existe par conséquent une constante positive β, telle que $0 < d_p < e^{-\beta p} (p > p_0)$. Il existe donc une constante positive γ telle que $S(3kp) > e^{\gamma p} (p > p_1)$. Comme $S(r)$ est une fonction croissante, notre condition en résulte immédiatement.

2° *La condition* (2) *est suffisante*. — Posons $a = -1$, $b = 1$. D'après un théorème de M. Jackson, on sait que la meilleure approximation $E_n(f)$ de la fonction $f(x)$ vérifiant (2), vérifie les inégalités : $E_n(f) < L^p m_p / n^{p-1} (p \leqq n)$, où L est une constante que nous pouvons supposer > 1. On peut donc écrire, en vertu de (2),

$$E_n(f) \leqq \frac{n}{S\left(\frac{n}{L}\right)} < ne^{-\alpha n} < e^{-\gamma' n}, \; (\gamma' > 0; n > n_0);$$

il en résulte alors, d'après un théorème de M. S. Bernstein [1], que $f(x)$ est une fonction analytique.

3° Considérons, dans le plan xOy, les points P_n de coordonnées (n, $\log m_n$); $\omega(t)$ étant une fonction donnée de $t (-\infty < t < \infty)$, désignons par P_{n_i} les points P_n qui jouissent de la propriété suivante : à chacun de ces points $P_{n_i} (i = 1, 2, \ldots)$ correspond une valeur t telle que ce point se trouve sur un segment de droite dont la projection sur Ox est le segment $O \leqq x \leqq \omega(t)$, et dont la projection sur Oy est de longueur $t\omega(t)$, aucun point P_n de la bande $O \leqq x \leqq \omega(t)$ ne se trouvant au-dessous de ce segment; t_i étant la borne supérieure de toutes les valeurs de t correspondant de la manière indiquée à P_{n_i}, traçons le segment L_i aboutissant en P_{n_i}, se projetant sur Ox suivant le segment (ouvert à droite) $n_i \leqq x < n_{i+1}$, et sur Oy suivant un segment de longueur $t_i(n_{i+1} - n_i)$.

A chaque entier $n (n_i \leqq n < n_{i+1})$ faisons correspondre le point $P_n^{(\omega)}$ de L_i dont l'abscisse est n; et désignons par $m_n^{(\omega)}$ la quantité dont le logarithme est l'ordonnée de $P_n^{(\omega)}$. Il est évident que si $\omega(t) = \infty (-\infty < t < \infty)$ alors $m_n^{(\omega)} = m_n^{(\infty)} = \overline{m}_n$ quantité introduite dans la Note citée. Nous posons main-

---

(1) *Leçons sur les propriétés extrémales*, Paris, 1926, p. 112.

tenant $\omega(t) = \exp. t = e^t$, et nous écrivons alors $m_n^{(\omega)} = m_n^{(\exp.)}$. Il est facile de constater que

Théorème II. — *La condition* (2) *est équivalente à la suivante :*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sqrt[n]{m_n^{(\exp.)}}}{n} < \infty.$$

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Remarques sur la définition des fonctions presque analytiques de M. Lavrentieff.* Note de M. **Simon Stoïlow**, présentée par M. Hadamard.

1. M. Lavrentieff ([1]) a introduit et étudié, sous le nom de fonctions *presque analytiques* d'une variable complexe z, une classe intéresssante de représentations continues

(1) $$W = f(z),$$

dont les fonctions analytiques ordinaires constituent un cas particulier.

Le but de la présentent Note est de faire remarquer que les deux premières conditions de M. Lavrentieff, conditions qui constituent la *partie topologique* de sa définition, reviennent à la définition des transformations intérieures, à savoir : transformations continues ayant pour invariants l'*ensemble ouvert* et le *continu compact*. L'étude directe de ces transformations ([2]) montre donc tout ce que l'on peut tirer des deux premières conditions de M. Lavrentieff en écartant, tout d'abord, sa troisième condition (qui précisera ensuite les caractères *métriques* des fonctions qu'il envisage).

2. L'ensemble (E) des points autour desquels, selon la deuxième condition de M. Lavrentieff, la représentation peut n'être pas localement homéomorphe est, par hypothèse, dénombrable et fermé. Comme, d'autre part, toute transformation homéomorphe localement est une transformation intérieure, tout revient à démontrer que, si une représentation continue d'un domaine plan est une transformation intérieure autour de chacun des points de ce domaine, sauf peut-être autour des points qui appartiennent à un certain ensemble (E), dénombrable et fermé, la représentation est nécessairement une transformation intérieure dans *tout* le domaine, sans exception.

([1]) *Comptes rendus*, 200, 1935, p. 1010.

([2]) *Annales scient. de l'École Normale*, 45, 1928, p. 347 et *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 2, 1932, p. 237.

S'il n'en était pas ainsi il y aurait [dans (E)] un point p (d'image P, par la représentation continue donnée) tel que tout ensemble, situé dans un certain voisinage (v) de p, qui aurait en p un point intérieur, aurait pour image un ensemble dont P serait point frontière.

Soit alors (γ) une courbe fermée simple entourant p et comprise dans (v), courbe que l'on peut choisir [à cause des hypothèses concernant la représentation continue et (E)] de manière que, sur (γ), il n'y ait aucun point d'image P. Soit (d) le domaine fermé et borné dont (γ) est la frontière. L'image (D) de (d) est encore un domaine borné et fermé [car (d) — (E) est dense dans (d)] et P est sur la frontière de (D). Nous allons montrer que cette dernière circonstance conduit à une contradiction.

Dans tout voisinage de P, il y a nécessairement [(D) étant domaine fermé] une infinité *non* dénombrable de points frontière de (D). Or ces points ne peuvent provenir que de la transformation de points de (γ) ou de (E). Comme (E) est dénombrable, il y en a certainement qui proviennent de points de (γ) et il y a donc sur (γ) un point qui a pour image P, ce qui contredit les conditions dans lesquelles nous avons choisi (γ).

3. Il résulte de là (*Annales de l'Institut H. Poincaré*, *loc. cit.*) que, pour toute fonction presque analytique [1], il existe une transformation topologique

$$z = t(z')$$

du domaine de la variable z, telle que

$$f[t(z')]$$

est une fonction analytique au sens ordinaire du mot.

Toutes les propriétés *topologiques* des fonctions presque analytiques sont donc les mêmes que celles des fonctions analytiques.

Si, dans la définition de M. Lavrentieff, on remplace la condition 3° (condition métrique) par l'une des conditions de M. Menchoff [1] on est conduit aux fonctions analytiques par la même voie.

---

[1] *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 59, 1931, p. 141.

PHYSIQUE. — *Sur le viscosimètre constitué par une sphère en rotation au sein d'un fluide.* Note de M. **Amédée Guillet**, présentée par M. Aimé Cotton.

Avec l'appareil précédemment décrit [1], il est facile d'obtenir une mesure du coefficient de viscosité d'un liquide, d'une huile minérale ou végétale par exemple. En suivant, pour l'huile d'olive, les variations de η avec la température τ, on constate que la courbe $\eta = f(\tau)$ coïncide avec celle que donne la méthode d'écoulement en régime de Poiseuille. Il y a donc accord entre le calcul théorique et l'expérience pour des translations ou des rotations laminaires cylindriques.

En est-il de même lorsque l'on substitue au cylindre un autre solide de révolution, une sphère par exemple?

Pour le voir il est commode de se servir des hémisphères de Magdebourg. Soit S_1 la sphère creuse, de rayon R_1 ainsi constituée; R_0 le rayon de la sphère S_0 suspendue au fil de torsion à l'intérieur de S_1 et centrée sur S_1. Le liquide à étudier est introduit dans la cavité $S_1 S_0$ par l'orifice où passe la tige de suspension de S_0 et évacué par un ajutage fixé au-dessous du robinet destiné aux rentrées d'air dans l'emploi normal des hémisphères. S_0, S_1 peuvent servir d'armatures ou d'électrodes lorsqu'on désire suivre l'effet d'un champ électrique, d'une polarisation ou d'une nappe de courants radiants.

Le moment $\mathfrak{M}$ du couple de viscosité appliqué à la sphère S_0 lorsque celle-ci tourne autour du diamètre vertical, se mesure comme dans le cas du cylindre. La capacité $S_1 S_0$ est d'abord entièrement occupée par le liquide, puis, par écoulement d'un volume Δv du liquide, on porte la surface libre à la distance z du centre commun à S_1 et S_0. On a

$$\Delta v = \frac{2\pi}{3} R_1^3 - \pi z R_1^2 + \frac{1}{3}\pi z^3 \qquad \text{ou} \qquad \Delta v = \frac{2\pi}{3}(R_1^3 - R_0^3) - \pi z (R_1^2 - R_0^2),$$

selon que la surface libre ne rencontre pas ou rencontre S_0.

Voyons tout d'abord les *hypothèses* liées aux vues de Navier et de Stokes qui conduisent à une expression théorique $\mathfrak{M}'$ du moment de la réaction exercée par le fluide sur la sphère en rotation S_0.

---

(1) *Comptes rendus*, 200, 1935, p. 442.

Il est naturel, lorsque l'appareil est plein de liquide, d'admettre l'existence d'un régime permanent tel que les molécules réparties sur une même surface sphérique S de rayon ρ centrée sur $S_1 S_0$ tournent ensemble avec une vitesse angulaire ω qui devient $\omega + \delta\omega$ sur la sphère S' de rayon $\rho + d\rho$. Les points M, M' situés sur un rayon faisant l'angle γ avec l'axe de rotation, étant distants de cet axe de r et $r + \delta r$, ont pour mesures respectives les produits ωr, $(\omega + \delta\omega)(r + \delta r)$ d'où la variation $\delta v = \omega\,\delta r + r\,\delta\omega$ entre M et M'. Le gradient de vitesse en M est donc

$$\frac{\delta v}{\delta \rho} = \omega \sin\gamma + r\frac{\delta\omega}{\delta\rho}.$$

Comme la *friction interne* à laquelle Newton a rapporté les effets de viscosité, ne peut provenir que du déplacement relatif des particules, le terme $\omega \sin\gamma$ est inopérant comme répondant à une rotation commune des particules. Admettons encore d'autre part que la force de viscosité df appliquée à la zone $d\gamma$ d'aire dS a pour expression $\eta\, dS\, \delta v/\delta\rho$, qu'elle est tangente à la zone et a même direction que la vitesse v, le moment des actions tangentielles exercées sur toute la surface S est alors

$$(1)\qquad \mathfrak{M}' = \eta . 2\pi\rho^4 \frac{\delta\omega}{\delta\rho}\int_0^\pi \sin^3\gamma\, d\gamma = \eta\frac{8\pi}{3}\rho^4\frac{\delta\omega}{\delta\rho},$$

Pour que la lame sphérique SS' conserve une certaine vitesse angulaire ω il faut que pour cette valeur de ω le moment total appliqué à la lame SS' soit nul, ce qui aura lieu évidemment si ω est indépendant de ρ. Intégrant (1) dans cette hypothèse et tenant compte de ce que $\omega = \omega_0$ sur S_0 et par exemple $\omega_1 = 0$ sur S_1, il vient

$$\mathfrak{M}' = \eta . 8\pi\omega_0\frac{R_0^3 R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} = \eta . 16\pi^2\nu R_0^3\frac{1}{1 - x^3}, \qquad \text{où} \quad x = \frac{R_0}{R_1}.$$

Et maintenant que donne l'expérience ?

Pour une sphère de laiton de rayon $R_1 = 3^{cm},113$ ($T_1 = 11,35$ secondes $I = 3879,16$) et avec $R_1 = 5^{cm},82$, on a $\mathfrak{M} = 4\pi^2 I/T_1^2 . \alpha = 61,92 . n$, $\mathfrak{M}' = 5619\eta$. Si donc *on pose* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$, il vient $\eta = 0,0110 n$ où n est le recul de l'aiguille exprimé en divisions du disque. En construisant à l'aide de ce viscosimètre S_1, S_0 la courbe $\eta = \varphi(\tau)$, on constate qu'elle ne coïncide avec celle obtenue plus haut qu'après en avoir divisé les ordonnées par un certain coefficient, égal ici à 1,44. La courbe $\mathfrak{M} = F(z)$ relative à l'abaissement progressif du niveau est très régulière et ne présente aucune

particularité. Si $\mathfrak{M}_i$ est le moment initial, $z = R_1$, le moment au passage par l'équateur est $\mathfrak{M} = 0{,}65\ \mathfrak{M}_i (z = 0)$ et il faut abaisser le niveau d'environ $1^{cm}, 18$ au-dessous de l'équateur pour que $\mathfrak{M} = 0{,}5\ \mathfrak{M}_i$.

Consécutivement à l'arrêt brusque du moteur la sphère tourne encore d'un angle β de l'ordre $\sqrt{\alpha^2 + \nu^2 T_1^2}$ puis oscille. Malgré des rotations prolongées, des arrêts et remises en marche souvent renouvelés, le fil convenablement traité et monté, conserve son zéro.

Le fait que des viscosimètres, absolus au même titre, leurs formules étant en effet établies à partir des mêmes considérations hydrodynamiques, ne donnent pas la même valeur pour η semble devoir être rapporté à quelque insuffisance dans les hypothèses de calcul adoptées, et rappelées plus haut.

ÉLECTRONIQUE. — *Sur les changements brusques de vitesse et de direction présentés par les trajectoires d'électrons de grande énergie.* Note (1) de M. **Louis Leprince-Ringuet**, transmise par M. Maurice de Broglie.

1. L'étude des corpuscules du rayonnement cosmique pose un grand nombre de problèmes qu'il est fort difficile de résoudre, vu la différence des propriétés que l'on constate entre eux et les rayonnements radioactifs bien étudiés. On peut espérer avoir des éclaircissements sur ces problèmes et se faire une idée de la variation des propriétés lorsqu'on passe des énergies des rayons bêta habituels à celles des rayons cosmiques en étudiant des électrons dont l'énergie serait de quelques millions d'électron-volts. Il est possible d'avoir des sources appréciables de tels électrons (partie pénétrante du spectre bêta, électrons secondaires du rayonnement gamma du Th C″, électrons de grande énergie observés dans les radioactivités artificielles ou dans les phénomènes accompagnant l'émission des neutrons).

J'ai utilisé surtout une source de (radiothorium + béryllium) protégée de tous côtés par 13^{cm} de plomb pour obtenir dans une chambre de Wilson de 11^{cm} de diamètre des trajectoires d'électrons d'énergie comprise entre 1 et 10 millions d'électron-volts. La chambre à détente est percée de deux fenêtres de 9^{cm^2} chacune, fermées par des feuilles minces d'aluminium, et peut être déclenchée par les impulsions ou les coïncidences des impulsions de compteurs à parois minces, selon la méthode de Blackett-Occhialini.

(1) Séance du 15 avril 1935.

Il est ainsi possible de sélectionner les particules pénétrantes qui se trouvent en faible proportion dans un rayonnement plus mou; mais, lorsque les particules pénétrantes traversant la chambre sont en nombre suffisant, il n'est pas toujours avantageux de déclencher l'appareil par les compteurs, la précision sur les mesures de courbures étant la plus grande pour les trajectoires fines déclenchées au hasard. Les premières séries de mesures ont été effectuées avec un champ magnétique de 1400 gauss et groupent un millier de trajectoires fines. Des écrans d'aluminium (7/10 et 15/10 de millimètre) et d'argent (5/10 de millimètre) ont été placés au milieu de la chambre.

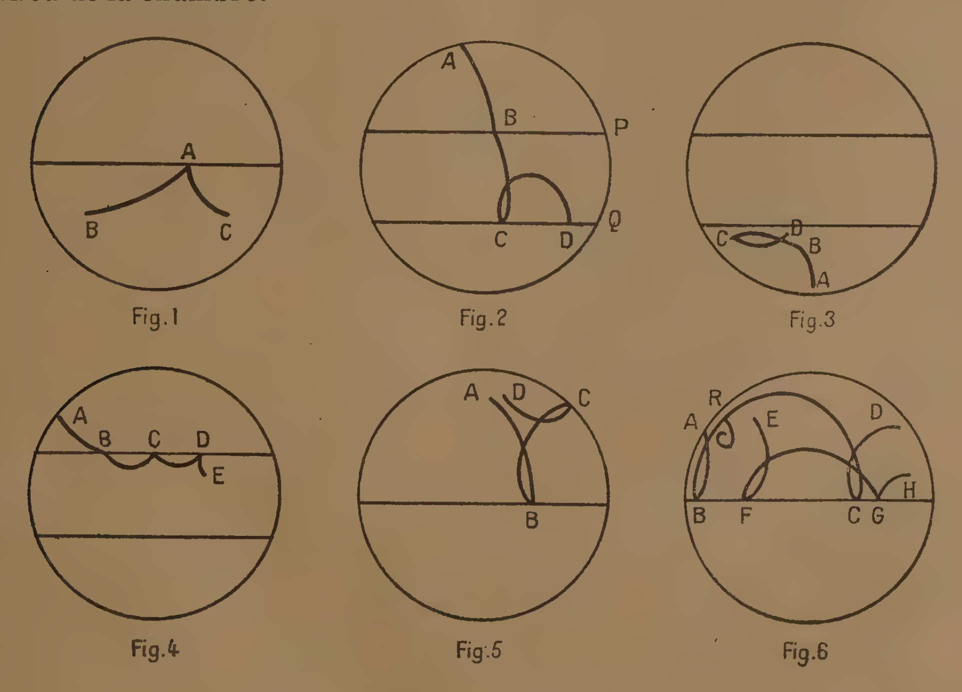


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3
Fig. 4 Fig. 5 Fig. 6

2. J'ai remarqué fréquemment des groupes de deux électrons partant d'un même point du métal ou du gaz, ou aboutissant au même point, selon la figure 1. Cette figure peut s'interpréter par l'hypothèse d'une matérialisation de photon en A, mais on n'a en général aucune certitude sur le sens dans lequel est décrite chaque branche de la paire. Il n'est pas non plus facile de faire état de la direction de la source; car on sait que les rayonnements obtenus avec les sources précédemment indiquées sont complexes (ainsi les neutrons accompagnant le rayonnement pourraient exciter des noyaux qui émettraient à leur tour un rayonnement gamma dont la direction serait sans rapport avec celle de la source).

On peut, dans certains cas favorables, avoir une indication sur le sens de description des trajectoires AB et AC de la figure 1. Les clichés qui sont reproduits ci-dessus donnent de telles indications et attirent l'attention sur l'importance des phénomènes de diffusion sous grands angles. Les énergies W sont indiquées en millions d'électron-volts.

Figure 2. — P et Q sont deux plaques d'aluminium de 7/10e et 15/10e de millimètre :

$$W_{AB} = 1,4; \quad W_{BC} = 1,2; \quad W_{CD} = 0,5.$$

L'angle en C est 130°. Le phénomène observé en C n'est pas une matérialisation; car le rayon AC vient de A vers C. Comme son énergie en C est supérieure à celle de CD, l'interprétation la plus simple est celle d'une diffusion sous un grand angle du négaton AC [1].

Figure 2. — Le positon AB subit deux coudes au sein même du gaz, avec changement de direction de 80° et 120°. Il n'y a pas matérialisation en C. W_{AB} est imprécis mais supérieur à 1,3; W_{BC} est compris entre 0,7 et 1; $W_{CD} = 0,2$.

Il y a donc deux pertes brusques d'énergie aux deux coudes.

Figure 4. — On voit un positon AB qui traverse la plaque supérieure puis est diffusé en C de 70° et en D de 130° :

$W_{AB} = 2$ environ; $\quad W_{BC} = 0,3$; $\quad W_{CD} = 0,2$; $\quad W_{DE}$ est petit et non mesurable.

Figure 5. — Plusieurs clichés analogues à celui-ci ont été obtenus :

$$W_{AB} = 2,1 \pm 0,2; \quad W_{BC} = 0,9; \quad W_{CD} = 0,5.$$

Les angles de diffusion sont 135° en B et 90° en C. Lorsque le changement de direction ne s'est pas produit au sein du gaz, il n'est pas possible de savoir s'il y a eu perte brusque d'énergie; car le rayon peut pénétrer plus ou moins à l'intérieur de la matière solide. La *figure* 5 peut s'interpréter par deux diffusions successives du négaton AB.

Figure 6. — La plaque est de 0,5mm d'argent. On voit sur le même cliché deux négatons qui présentent chacun deux diffusions successives.

Il y a en plus, en R, sur la portion BC, un changement brusque de courbure important, sans changement de direction de plus de 10 degrés. Cela confirme le sens dans lequel la trajectoire est décrite. Les énergies sont :

$W_{AB} \geqq 2,5$, mais non mesurable; $\quad W_{BR} = 2,5$; $\quad W_{RC} = 1,3$; $\quad W_{CD} = 0,95$.

Les angles de diffusion sont 160° environ en B et en C.

Ces expériences montrent qu'il faut, dans l'étude des matérialisations, faire grande attention aux apparences présentées par les phénomènes fréquents de diffusions sous de grands angles.

---

[1] Tous les clichés étant stéréoscopiques, l'examen stéréoscopique des positifs ne laisse aucun doute sur la coïncidence dans l'espace des points de rencontre observés.

SPECTROSCOPIE. — *Sur le spectre d'absorption des bichromates alcalins.* Note de M. **Radu Titeica**, présentée par M. Jean Perrin.

Au cours des recherches que nous poursuivons sur la fluorescence des hydrocarbures à plusieurs noyaux benzéniques, nous avons été amené à étudier les spectres d'absorption d'un grand nombre de substances pouvant servir d'écrans en vue de monochromatiser la lumière de l'arc au mercure qui nous servait de source excitatrice.

Parmi toutes ces substances, les solutions aqueuses des bichromates se signalent à l'attention par la présence d'une bande forte, bien isolée dans le proche ultraviolet. Nous avons étudié de plus près cette bande et avons abouti à certains résultats intéressants. Le spectrographe utilisé était le Hilger modèle E 31, donnant environ 70 Å/mm, dans la région intéressante. Nous avons étudié quatre bichromates alcalins : ceux de lithium, de sodium, de potassium et d'ammonium. Les maxima de leurs bandes d'absorption se situent, respectivement, à 3520 Å; 3535 Å; 3575 Å et 3670 Å. On voit donc que, le bichromate d'ammonium excepté, la position du maximum de la bande se déplace vers le visible lorsque le poids atomique du métal alcalin augmente. La présence de la bande d'absorption des quatre sels dans la même région indique, toutefois, qu'elle est due à l'ion Cr^2O^7.

En étudiant de plus près ces bandes des bichromates, on peut se rendre compte (surtout pour une dispersion pas trop forte et une concentration convenable) que, du côté des grandes longueurs d'onde à partir des maxima, elles possèdent une structure. Celle-ci comprend plusieurs bandes faibles et de maxima peu marqués. L'aspect de ces bandes dépend de la concentration de la solution étudiée et rappelle l'aspect des bandes de vibration d'un niveau électronique.

Cette structure à été déjà observée pour des cristaux de chromate et de bichromate de potassium par H. Schaumann (1). Elle est peu nette à la température ordinaire, mais bien plus marquée à 20°K. On en déduit, pour la fréquence de vibration correspondante, la valeur 800 cm^{-1}.

Il est très remarquable que cette même structure puisse être observée en solution, à la température ordinaire. Nos mesures donnent (en tenant compte de l'erreur due à la faible dispersion utilisée) presque la même valeur que celle observée par Schaumann pour les cristaux. En effet, nous

(1) *Zeit. f. Phys.*, 76, 1932, p. 106.

obtenons, en moyenne, 755 cm^{-1} pour le sel de lithium, 763 cm^{-1} pour celui de sodium et 803 cm^{-1} pour celui de potassium. Nous remarquerons que la même valeur de 800 cm^{-1} a été obtenue par Schaumann pour le cristal de monochromate de potassium, ce qui paraît indiquer qu'il s'agit ici d'une fréquence du groupement CrO, commun aux deux ions complexes CrO^3 et Br^2O^7.

La valeur ainsi trouvée pour le premier état électronique excité concorde bien avec la valeur attendue, si l'on se rapelle que, dans l'effet Raman, Nisi ([1]) a trouvé pour le monochromate de sodium une fréquence de 855 cm^{-1}, correspondant à l'état électronique fondamental de l'ion. De même, on peut rapprocher notre valeur de la fréquence 750,7 cm^{-1} trouvée par Chandrasekhar Ghosh ([2]) pour l'état de vibration dans le niveau électronique excité du spectre de CrO. (La valeur pour l'état inférieur est de 898,8 cm^{-1}, peu différente de celle observée par Nisi.) Ceci montre que cette fréquence de vibration est bien due au CrO.

PHOTOGRAPHIE. — *Influence de l'eau sur la sensibilité des émulsions photographiques.* Note de M. **André Charriou** et de Mlle **Suzanne Valette**, présentée par M. Georges Perrier.

Au cours des prises de vues, par photographie aérienne à haute altitude, il peut se produire une condensation de la vapeur d'eau contenue dans les appareils photographiques, avec dépôt d'eau sur les couches sensibles. Ce phénomène se remarque lorsque l'avion navigue dans des régions de l'atmosphère où la température est très inférieure à celle qui régnait au point de départ de l'avion, au moment du chargement de l'appareil.

Cette présence d'eau entraîne généralement une chute de la sensibilité de l'émulsion. Aussi nous sommes-nous proposé d'étudier ce phénomène, dans le cas des émulsions à très haute sensibilité, actuellement utilisées en photographie aérienne.

Mode opératoire. — Des plaques photographiques, de format 13×18^{cm}, étaient coupées en quatre bandes, dans le sens longitudinal; les deux bandes extrêmes étaient rejetées, afin d'éviter toutes causes d'erreur dues aux irrégularités fréquentes des couches d'émulsion, sur les bords des plaques.

([1]) *Jap. Journ. Phys.*, 5, 1929, p. 116.
([2]) *Zeit. f. Phys.*, 78, 1932, p. 521.

Une des bandes centrales était recouverte d'eau pendant un temps variable suivant les expériences, et exposée immédiatement, donc *mouillée*, dans un sensitomètre. L'autre bande était, au contraire exposée *sèche* dans le sensitomètre. Toutes deux étaient ensuite développées en même temps. Nous pouvions ainsi comparer rigoureusement la sensibilité de l'émulsion sèche à celle de l'émulsion humide.

En vue de rechercher le mécanisme de ce phénomène, nous avons mesuré également l'influence sur la sensibilité de la présence d'une couche d'alcool ou d'acétone sur l'émulsion.

Résultats expérimentaux. — Les résultats les plus caractéristiques obtenus, au cours de nos essais, sont réunis dans le tableau ci-dessous :

Traitement des émulsions.

Sensibilité relative sous écran.	Plaque témoin.	Minutes dans l'eau. 5.	15.	30.	Minutes dans l'alcool. 5.	15.	Minutes. dans l'acétone. 5.	15.
Émulsion ordinaire, supersensible (1800° H. et D.) :								
Bleu ($\lambda < 5500$ A°)....	1	0,4	0,32	0,25	0,7	0,63	0,63	0,6
Émulsion orthochromatique, supersensible :								
Bleu ($\lambda < 5500$ A°)....	1	0,4	0,35	0,25	0,65	0,65	0,7	0,7
Jaune ($\lambda > 4800$ A°)...	0,8	0,4	0,32	0,25	0,32	0,32	0,3	0,3
Émulsion panchromatique, supersensible :								
Bleu ($\lambda < 5500$ A°)....	1	0,5	0,4	0,25	0,8	0,8	0,7	0,6
Rouge ($\lambda > 5600$ A°)...	1,15	0,9	0,8	0,7	0,65	0,65	0,6	0,5

On voit ainsi que, d'une façon générale, la sensibilité des émulsions très rapides diminue fortement par inhibition d'eau. Après 30 minutes de contact avec l'eau, la sensibilité vis-à-vis des radiations bleues est abaissée au quart de sa valeur initiale. La chute de sensibilité est moins accusée pour les radiations jaunes (sensibilité résiduelle : 1/3) et moins encore en ce qui concerne les radiations rouges (sensibilité résiduelle : 2/3). En effet, dans le cas des émulsions ortho- ou panchromatiques, le phénomène d'inhibition se complique d'une légère exaltation des propriétés des colorants sensibilisateurs, en raison de la dissolution d'une petite partie des halogénures solubles contenus dans l'émulsion.

Cette chute de sensibilité, qui a pour cause une modification de l'absorption des radiations lumineuses au sein de l'émulsion, augmente avec la

durée de l'application de l'eau. Il est donc très probable qu'il existe une liaison entre l'abaissement de la sensibilité et le gonflement de la gélatine. Du reste, l'effet sur la sensibilité aux radiations bleues est beaucoup moindre si l'on remplace l'eau par de l'alcool ou de l'acétone, liquides dans lesquels la gélatine est incapable de gonfler; de plus il n'augmente alors presque plus avec le temps.

Au contraire l'alcool et l'acétone sont plus énergiques que l'eau en face des radiations de grandes longueurs d'onde; car, comme l'un de nous l'a montré dans des travaux antérieurs, la présence d'un solvant autre que l'eau affecte profondément le pouvoir des colorants sensibilisateurs.

Conclusion. — *Ces expériences démontrent la nécessité de protéger les appareils de photographie aérienne contre les variations importantes de température.*

RAYONS X. — *Mise en évidence, aux rayons* X, *des déformations d'un réseau cristallin sous l'action du champ électrique.* Note de M. **Horia Hulubei**, présentée par M. Jean Perrin.

La maille élémentaire d'un cristal ionique peut être perturbée sous l'action d'un champ électrique. Cette perturbation, fonction de la polarisabilité du cristal suivant la direction étudiée, doit consister en un déplacement des ions, une orientation de dipôles préexistants etc. Le réseau cristallin se polarise et se déforme. La modification du *facteur de stucture*, par suite de la polarisation du réseau, apparaît dans des variations mesurables du pouvoir réflecteur sélectif pour les rayons X [au moins pour un cristal à très grande constante diélectrique : le sel de Seignette [1]]. Par contre la déformation de la maille élémentaire doit être très petite; aussi son analyse aux rayons X est-elle plus délicate.

Au cours d'expériences préliminaires sur le quartz et le mica, j'ai pu observer, à l'aide des rayons X, des variations de constantes réticulaires sous l'action d'un champ électrique statique (E).

Si la composante de la force électrique appliquée, suivant la normale au système de plans réticulaires en étude, provoque une variation δd de l'équidistance d, ou une rotation d'ensemble $\delta\alpha$ de ces plans, les raies spectrales résultant de la réflexion de Bragg seront déplacées en conséquence. Pour déceler ces déplacements, j'ai monté les lames cristallines

(1) H. Staub, *Phys. Zeits.*, 34, 1933, p. 292.

sur un spectographe à focalisation de diamètre R = 150$^{cm^2}$ (¹). Je pouvais ainsi étudier avec facilité les réflexions sélectives sur une série de plans internes d'inclinaisons (α) différentes sur E, et apprécier des

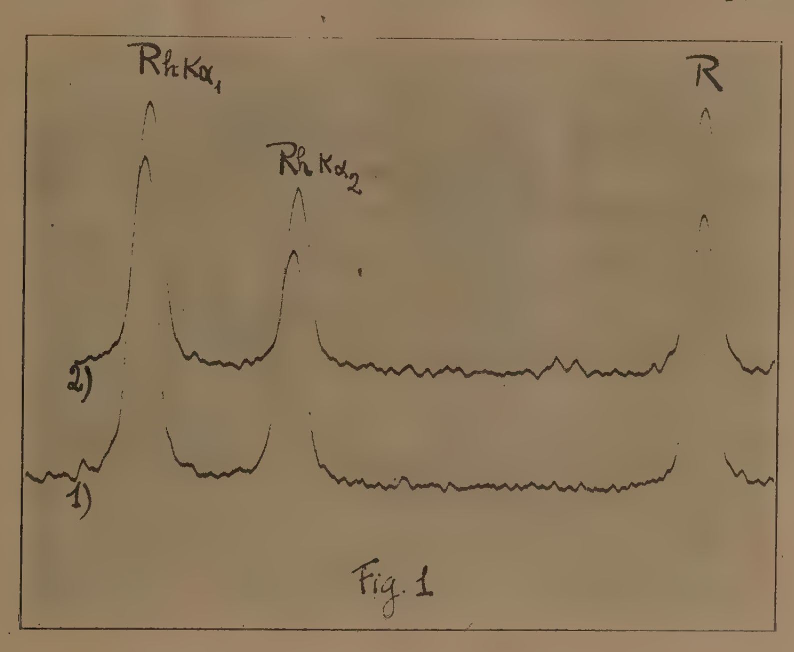


Fig. 1

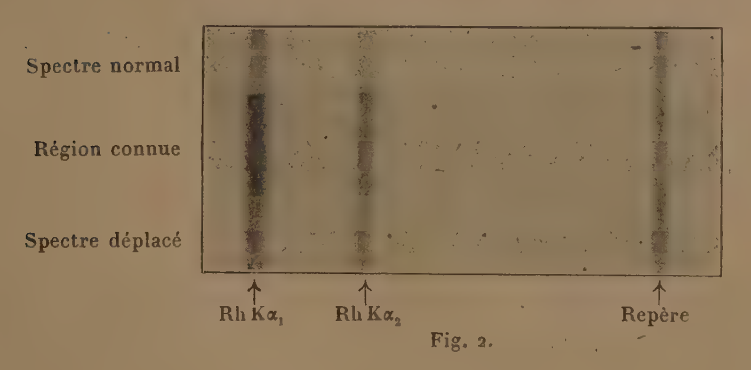


Fig. 2.

déplacements de raies spectrales (ici K du Rh) de deux secondes. J'ai évalué $\delta d/d$ d'après le changement de la dispersion, à l'aide de la relation : $\delta d/d = - 1/R \operatorname{cotg} \varphi (\delta l' - \delta l)$, φ étant l'angle de Bragg respectif et $\delta l'$ et δl les séparations linéaires de deux mêmes raies spectrales pour le cristal déformé et normal. La valeur de $\delta\alpha$ se déduit ensuite du déplacement

(¹) H. Hulubei et Y. Cauchois, *Comptes rendus*, 199, 1934, p. 857.

global observé pour une raie spectrale, en tenant compte de la grandeur et du sens du déplacement relatif au changement de dispersion :

$$\partial l = -R\frac{\partial d}{d}\tan g\varphi.$$

D'après le sens et la grandeur des déplacements des raies spectrales obtenues par réflexion sur l'une et l'autre face des plans réflecteurs étudiés, je pouvais d'ailleurs me convaincre de l'existence et de la valeur d'une rotation de ces plans. Dans mes expériences, pour des champs croissants les déplacements passent par un maximum.

Les champs, appliqués par l'intermédiaire de feuilles d'aluminium de $0^{mm},01$, collés à la gomme laque sur les faces de la lame, ont varié de 110 à 660 u.e.s./cm pour le mica et de 160 à 400 u.e.s./cm pour le quartz.

Pour plusieurs lames cristallines et sur plus de quarante clichés, j'ai pu constater les effets reproductibles de variation de d et de α. Les figures 1 et 2 reproduisent un agrandissement et un microphotogramme de l'un des clichés obtenus pour le quartz. Pour l'évaluation de ∂d, avec les champs que j'ai pu employer, j'étais très souvent à la limite de sensibilité de la méthode, mais j'obtenais toujours une indication précise du signe de ∂d; par contre, pour $\partial\alpha$ le phénomène était nettement mesurable sur certains plans réflecteurs.

A titre d'exemple, voici les résultats numériques pour un cas bien net : Lame de quartz (taille Curie); E = 200 u.e.s./cm suivant l'axe des X. Réflexions sur $(3\bar{4}0)$ $[d \simeq 1,17\ \text{Å}]$; j'ai trouvé $\partial d/d \simeq 6.10^{-5}$; $\partial\alpha \simeq 15''$.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Spectre d'absorption du benzène à haute température.* Note [1] de MM. **Victor Henri** et **C. H. Cartwright**, transmise par M. Georges Urbain.

Technique employée. — De la vapeur de benzène à une pression de 3^{mm} Hg et à 20°C. est scellée dans trois tubes d'absorption de longueurs respectives 25^{mm}, 96^{mm} et 396^{mm}, connectés entre eux. Les spectres d'absorption sont étudiés à 20, 170, 240, 330, 360, 420 et 460°C. et une fois de plus à 20°C. On photographie alors la région comprise entre 36500 et

(1) Séance du 8 avril 1935.

44500 cm^{-1} à l'aide d'une lampe à hydrogène prise comme source et d'un spectrographe Hilger E-383. Cette région contient les bandes principales de A à H. Toutes les expériences s'effectuent sur le benzène primitif.

Résultats. — Les phénomènes suivants accompagnent les changements d'intensité des diverses bandes :

1° Avec l'augmentation de la température, la structure fine disparaît successivement des bandes de haute fréquence H, G, F et E distantes de 921 cm^{-1} (environ une bande pour chaque élévation de 100°C.).

2° Une augmentation de l'absorption générale accompagne l'élévation de la température. La grandeur de cette augmentation peut être estimée en remarquant qu'à la température de 460°C. le temps d'exposition est d'environ 7 heures et à la température de 20°C. de 15 minutes.

3° Le spectre d'absorption primitif de la vapeur de benzène peut être réobtenu après que la vapeur a été chauffée et a rayonné pendant plusieurs heures à 460°C. Ce phénomène prouve que seule une très faible décomposition a pu avoir lieu.

Discussion. — L'apparition d'une forte prédissociation et d'une absorption générale de la vapeur de benzène dès la température de 170°C., prouve, ainsi que le fait que la décomposition thermique a lieu à environ 600°C., que nous avons affaire à un phénomène de vibration correspondant à une énergie moindre que 500 cm^{-1}. Cette vibration doit être fondamentale et anharmonique dans la molécule normale, plus anharmonique encore dans la molécule excitée.

Le critérium le plus rigoureux pour la discrimination des 30 modes fondamentaux de vibration est probablement que cette discrimination satisfasse aux conditions de chaleur spécifique. Kohlrausch signale 16 raies de Raman actives. Une application de la formule des chaleurs spécifiques aux diverses températures conduit à une absurdité pour toute distribution des 14 modes de vibration restants. R. W. Wood et G. Collins (¹) indiquent 23 raies de Raman. Même en négligeant les 3 raies de faible intensité, il ne resterait aucune distribution possible pour les 10 fréquences des raies de Raman inactives. Ceci prouve que les raies de Raman ne peuvent être attribuées dans leur totalité à des modes de vibration fondamentaux.

Des raisons de symétrie font prévoir que plusieurs modes de vibration seront dégénérés et ceci doit être tenu en ligne de compte dans le calcul des chaleurs spécifiques. Il est certain que la raie de Raman 991 cm^{-1}

(¹) *Phys. Rev.*, 42, 1932, p. 386.

est due aux six liaisons C-H, mais cette raie n'est pas dégénérée et représente seulement l'un des trente modes de vibration possibles ([1]). A une double dégénérescence correspondent deux modes de vibration qui, en l'absence d'un champ, ont une fréquence égale. Parmi les discriminations des modes de vibration du benzène que nous avons étudiés, celle de C. Manneback ([2]) s'accorde le plus parfaitement aux données de chaleurs spécifiques. Son analyse, basée sur des considérations dynamiques, conduit à dix modes de vibration non dégénérées parmi lesquelles les raies 991 (liaison C-H) et 3060 (expansion radiale du benzène) sont des raies de Raman actives, une troisième est infrarouge active et les sept autres ne sont ni des raies de Raman ni des raies infrarouges actives. Viennent ensuite dix modes doublement dégénérés dont cinq sont des raies de Raman actives (604, 849, 1178, 1600 et 3047)([3]), trois infrarouges fortement actives et les deux autres infrarouges faiblement actives. La théorie de Manneback permet seulement deux fréquences inférieures à 500 cm^{-1} (l'une non dégénérée et inactive, l'autre doublement dégénérée et infrarouge faiblement active) mais leurs énergies ne sont pas rigoureusement déterminées. Une vibration correspondant à une énergie inférieure à 500 cm^{-1} résulte d'un plissement de l'anneau de benzène et produit peut-être, comme le suggère Manneback, une décomposition thermique de l'anneau à 600°C; en deux molécules C^3H^3 ([4]).

Thompson a montré en effet l'existence de C^3H^3 à haute température; mais son absence à température ordinaire peut être due à une recombinaison ou à une décomposition plus poussée. Lorsque la température augmentant, les niveaux quantiques supérieurs se peuplent davantage, un plissement qui serait instable pour la molécule normale peut, suivant le principe de Franck et Condon, devenir instable dans la molécule excitée. Ceci pourrait fournir une explication à la prédissociation et à l'absorption générale qui se manifestent lors d'une élévation de la température. La pré-

---

([1]) Ceci est mis en évidence par la considération des trois modes de vibration d'une molécule linéaire et triatomique.

([2]) Conférence faite à Liége.

([3]) Wilson (*Phys. Rev.*, 46, 1934, p. 146) fait le même choix de raies de Raman fondamentales.

([4]) Cette énergie correspond peut-être à l'une des fréquences de combinaison 420, 250, 170, 130, 70 cm^{-1} qu'on observe dans l'ultraviolet pour la molécule excitée, ou bien à l'une des raies observées dans l'infrarouge extrême à 168, 140, 117, 87, pour le benzène liquide par Barnes, Benedict et Lewis (*Phys. Rev.*, 47, 1935, p. 129).

dissociation produirait 2 molécules de C^3H^3. Celles-ci, si elles naissent d'un plissement excessif de l'anneau de benzène, pourraient n'être pas complètement séparées mais se recombiner en grande partie [1]. Cette hypothèse s'accorde avec nos résultats : en effet l'absorption du spectre primitif est réobtenue à température ordinaire après qu'une série complète d'expériences ont été effectuées.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Propriétés d'un zinc d'une pureté exceptionnelle comparées à celles d'autres échantillons de zinc.* Note de M. **Louis Bouchet**, présentée par M. Aimé Cotton.

Le zinc extra-pur qui m'a servi de terme de comparaison avait été préparé à Palmerston au Laboratoire de Recherches de *The New-Jersey Zinc Company;* il avait été obtenu par des distillations fractionnées dans le vide [2]. Sa pureté est telle que, d'après les analyses spectroscopiques de M. H. M. Cyr, il ne renferme plus que 0,0001 pour 100, au maximum, d'impuretés. Les Sociétés Vieille-Montagne et Asturienne des Mines m'ont, elles aussi, fourni des spécimens de zinc, dont le plus pur titrait 99,995 pour 100. J'ai également opéré sur du zinc pour analyses et sur du zinc commercial.

Tous ces échantillons ont subi les mêmes traitements à 18° et à la pression ordinaire : ils ont d'abord été pesés à l'aide d'une balance apériodique permettant d'apprécier le dixième de milligramme, puis immergés dans des solutions chlorhydrique, sulfurique avec eau bidistillée, enfin pesés à nouveau après un dessèchement énergique. Tout l'appareillage était en quartz fondu. L'eau bidistillée que j'ai préparée avait comme caractéristiques :

$$\text{conductivité } \varkappa = 0{,}95 \times 10^{-6}; \quad \text{pH} = 5{,}9.$$

La conductivité était mesurée au pont de Kohlrausch et le pH déterminé par l'indicateur bleu de bromo-thymol.

---

(1) R. G. Norrish, H. G. Crone et O. D. Saltmarsh ont indiqué (*Journ. Chem. Soc.*, 318, 1936, p. 1456) une explication du faible rendement quantique observé dans la production du spectre continu de l'acétone, qui pourrait peut-être s'appliquer aussi au benzène.

(2) *Research Division*, The New-Jersey Zinc Company, Palmerston, Pa.

Je résume ci-après les résultats :

1° *Action d'une solution d'acide chlorhydrique chimiquement pur à* 15 pour 100. — Pour une durée d'immersion de 5 heures, le *spectroscopically pure zinc*, zinc extra-pur, a perdu seulement 0,022 de son poids, tandis que les pertes éprouvées par les autres échantillons croissaient avec les impuretés : ainsi pour le zinc de l'Asturienne titrant 99,978 pour 100, son poids diminuait de plus de 25 pour 100. On avait eu soin de réaliser des surfaces d'attaque égales dans tous les cas.

2° *Action de l'acide sulfurique chimiquement pur à* 20 pour 100. — L'action de cette solution sur le zinc extra-pur est plus réduite que précédemment; il en est de même pour tous les autres échantillons, la corrosion croît encore, toutes choses étant égales d'ailleurs, avec les impuretés.

3° *Action de l'acide azotique concentré à* 40°B. *et chimiquement pur.* — Avec cet acide, les vitesses de dissolution sont inversées : les zincs les plus purs sont le plus rapidement dissous; ainsi, un zinc de la Vieille-Montagne pesant $4^g,0959$ et titrant 99,995 pour 100 a été complètement dissous en 10 minutes, tandis que le zinc pour analyses, pendant le même temps, n'a perdu que la moitié de son poids et le zinc commercial le tiers environ; le zinc extra-pur est violemment attaqué avec un dégagement abondant de vapeurs nitreuses.

4° *Action de l'eau bidistillée de conductivité :* $\varkappa = 0,95 \times 10^{-6}$. — D'après mes pesées, le zinc extra-pur accuse une très légère augmentation de poids : $0^g,0001$ qui peut être imputable aux erreurs d'expériences; les autres spécimens de zinc sont tous corrodés dans le même sens qu'avec les solutions chlorhydrique et sulfurique, mais dans des proportions moindres.

En somme, le zinc extra-pur est celui qui résiste le mieux aux solutions chlorhydrique et sulfurique, sa masse est même conservée dans l'eau bidistillée. Quant à l'action de l'acide azotique concentré, elle peut s'interpréter en invoquant la *passivité* de certaines impuretés et aussi par d'autres actions secondaires dont l'une se traduit par la relation [1]

$$9\,AzO^3H + 4\,Zn = 4\,Zn(AzO^3)^2 + 3\,H^2O + AzH^3.$$

Je pense qu'il serait possible d'établir un procédé de dosage global des impuretés basé sur les vitesses de dissolution des métaux dans des liquides appropriés.

---

[1] Würtz, *Dictionnaire de Chimie*, 1re Partie, 1, p. 403.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Spectres d'absorption ultraviolet de quelques sels de thioniums aryliques purement hydrocarbonés.* Note [1] de M. **Maurice Chaix**, présentée par M. Marcel Delépine.

Les thioniums sont des composés, à propriété basique, de formule générale (1). On connaît depuis longtemps les thioniums aliphatiques [2], arylaliphatiques ou dérivés de la diméthylaniline [3] ou du phénol [4]; mais ce n'est que récemment que MM. Courtot et Chiffert [5] ont découvert les thioniums aryliques purement hydrocarbonés.

Les thioniums que nous étudions dans cette Note ont été obtenus par condensation directe de la sulfinone et du carbure, en présence du chlorure d'aluminium [6], suivant le schéma global ci-dessous

$$R-SO-R'+R''H \rightarrow \begin{matrix} R \\ R' \\ R'' \end{matrix}\!\!>S-OH. \qquad (1)$$

Le mode opératoire que nous avons utilisé pour la détermination des spectres d'absorption a été décrit dans un autre périodique [7] et la purification a été poursuivie jusqu'à spectre constant; mais, dans le cas présent, les corps sont longs et délicats à cristalliser. Nous n'avons pas opéré sur les bases libres car elles s'altèrent rapidement et l'étude a été faite sur des sels stables : chlorures et nitrates. La plupart des solutions ont été faites dans l'eau, à la concentration M/2000 et, à titre d'exemple, donnons quelques valeurs du logarithme du coefficient d'extinction moléculaire Σ en fonction de la longueur d'onde λ, pour le nitrate de triphényl-thionium.

log Σ..................	2,5.	2,9.	3,2.	3,8.	4,1.
λ................	2830 Å	2880 Å	2780 Å	2580 Å	2520 Å

De plus signalons la présence de deux bandes légèrement marquées à 2750 et 2660.

---

(1) Séance du 15 avril 1935.

(2) Von Oefele, *Ann. Ch. et Phys.*, 4e série, 3, 1864, p. 473.

(3) Michaelis et Godchaux, *Ber. d. deutsch. chem. Gesells.*, 45, 1912, p. 757.

(4) Smiles et Le Rossignol, *J. Chem. Soc.*, 89, 1906, p. 696.

(5) *Comptes rendus*, 194, 1932, p. 986.

(6) Courtot et Tung, *Comptes rendus*, 197, 1933, p. 1227; Tung, *Thèse Ingénieur-Docteur*, Nancy.

(7) Chaix, *Bull. Soc. chim.*, 4e série, 53, 1933, p. 697.

Les spectres des chlorures et nitrates d'une même base sont sensiblement identiques. Si, d'autre part, nous comparons les chlorures ou nitrates de phényl-*pp'*-ditolyl-thionium et de *pp'p''*-tritolyl-thionium, nous voyons que l'introduction de deux ou trois radicaux CH^3 en para du soufre n'amène qu'un léger glissement (environ 20 Å) vers les grandes longueurs d'onde et ce n'est qu'en étudiant les spectres sensiblement identiques des tri-(diméthyl-2.4-phényl)-thionium et tri-(diméthyl-3.4-phényl)-thionium que l'on observe un effet plus intense (déplacement vers les grandes longueurs d'onde d'environ 80 Å).

Signalons encore qu'en étudiant le spectre d'absorption du chlorure de tri-(diméthyl-3.4-phényl)-thionium à diverses concentrations (M/250 à M/2000), en solution dans l'eau à différents pH et en solution aqueuse ou en solution dans l'alcool éthylique, nous n'avons pas décelé de modifications sensibles.

Ley et Arends (1) ont étudié le spectre d'absorption du chlorure de triméthyl-thionium en solution aqueuse, ils n'ont pas trouvé de bandes d'absorption et ce thionium de série aliphatique est légèrement moins transparent que les sulfates de sodium ou de potassium, l'absorption n'est donc notable que vers les courtes longueurs d'onde (1800 à 2000 Å).

Le sulfure de diphényle est, d'autre part, nettement plus coloré que le chlorure de triphényl-thionium.

Nous voyons également que les thioniums sont plus bathochromes que le triphénylcarbinol et le triphényl-α-chloro-méthane (2), bien que le triphénylaminochlorométhane absorbe dans la partie visible, alors que le chlorure de triaminotriphényl-thionium est incolore.

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Dispositif d'analyse spectrale quantitative.* Note (3) de M. **Henri Triché.**

Il a été indiqué qu'on pouvait doser un métal M_1 contenu dans un alliage A_1 en comparant une de ses raies avec une raie convenablement choisie, d'un autre métal M_2, contenu dans un autre alliage ou une solution A_2.

---

(1) *Zeit. für. phys. Chem.*, B, 15, 1932, p. 311.

(2) Hantzsch, *Ber. d. deutsch. chem. Gesells.*, 55, 1922, p. 953; Orndorff, *J. Am. Chem. Soc.*, 49, 1927, p. 1541; Anderson, *J. Am. Chem. Soc.*, 50, 1928, p. 210.

(3) Séance du 15 avril 1935.

Pour s'affranchir d'une manière absolue, des influences électriques sur le rapport d'intensité des deux raies, on a été conduit à comparer la raie du métal M_1 dans A_1 à celle du même élément fournie par un alliage connu A_2.

Pour obtenir, dans les mêmes conditions, les deux raies dans le prolongement l'une de l'autre et sans mélange des vapeurs, il suffit d'intercaler dans l'étincelle ou l'arc une lame d'un métal M_3 qui ne contient pas l'élément à doser M_1. Il se produit deux étincelles, l'une entre M_2 et M_3 et l'autre entre M_1 et M_3; elles sont voisines et peuvent être projetées ensemble sur la fente F du spectrographe au moyen d'une lentille de quartz L; les deux électrodes M_1 et M_2 sont mises à la même distance de M_3. Si la plaque M_3 est prolongée par un écran opaque E jusqu'à la lentille, on peut placer sur cette lentille deux diaphragmes à ouverture variable, qui permettent de faire varier les intensités des raies pour obtenir leur égalité.

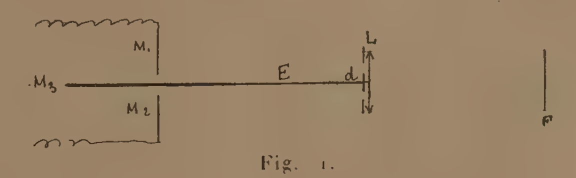


Fig. 1.

L'emploi de la lentille n'est pas nécessaire si l'on veut comparer l'échantillon à doser à une série d'alliages de composition connue : il suffit de prolonger la plaque M_3 par un écran opaque E' jusqu'à la fente du spectrographe. Ce montage simple présente le grand avantage que les étincelles peuvent se déplacer un peu, sans que les résultats soient faussés. Pour obtenir l'égalité d'intensité des deux raies, on peut placer sur le trajet des faisceaux un secteur tournant à ouverture variable.

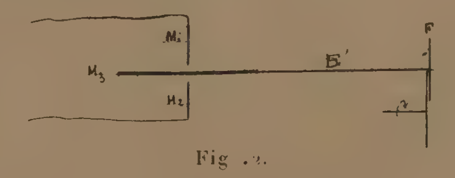


Fig. 2.

Si l'on emploie la lentille, il faut que les deux étincelles soient fixes pendant la pose. Avec une plaque intercalaire plane, elles ont tendance à bouger; on évite cet inconvénient en taillant la plaque de façon qu'elle présente deux petites saillies opposées qui fixent l'étincelle.

Nous avons ainsi examiné divers aluminiums contenant, soit du calcium, soit du silicium. La plaque M_3 était de l'aluminium très pur.

Comparaison avec les autres méthodes. — 1° Cette méthode est analogue à la méthode des spectres de comparaison; mais elle en diffère avantageusement puisque le temps de pose n'a pas d'influence et que les conditions électriques peuvent même varier pendant la pose sans changer les résultats.

2° Elle peut être rapprochée de la méthode de Barrat [1]. Dans cette dernière, on fait éclater deux étincelles, l'une entre deux électrodes de l'alliage à doser, l'autre entre deux électrodes du métal pur ou entre deux alliages de même composition connue; la lumière qui provient des étincelles est renvoyée sur la fente, au moyen d'un biprisme. Dans le procédé que nous avons indiqué, le nombre d'électrodes est réduit au minimum, et la grande proximité des étincelles permet de les traiter comme une étincelle unique et de n'avoir, pour tout système optique, qu'une lentille ou même un simple écran

En résumé, ce procédé permet de faire des dosages dont les résultats sont indépendants des conditions électriques, optiques et photographiques (si l'on produit l'égalité d'intensité des raies sur la plaque) et n'exige qu'un matériel et un réglage très simples.

Les dosages peuvent être effectués pour n'importe quelle teneur. Pour les plus faibles, on sera obligé de choisir parmi les raies ultimes de de Gramont; mais si l'on veut mesurer des concentrations moyennes, on aura intérêt à choisir la raie de plus grande sensibilité relative, c'est-à-dire celle dont la variation d'intensité est la plus grande pour une petite variation de la concentration. Les autres méthodes, sauf celle de Barrat et celle des spectres de comparaison, ne permettent pas de choisir la raie dont la sensibilité relative est la plus grande. Le choix d'une raie y est limité par le fait qu'elle doit être voisine d'une raie d'un autre métal et que le rapport de leurs intensités doit être, autant que possible, indépendant des conditions électriques. De plus pour le dosage sous forme de solution, l'introduction d'un métal auxiliaire ne doit pas provoquer de précipitation.

Formule d'interpolation. — Soient deux alliages de concentrations connues, C_1 et C_2, et un alliage de concentration inconnue C_x; soient i_1, i_2, i_x les intensités correspondantes d'une raie. Si les concentrations C_1 et C_2 sont voisines on peut admettre que l'intensité varie linéairement avec la concentration. L'équation de la droite $A_1 A_2$ est

$$\frac{i_x - i_1}{i_2 - i_1} = \frac{C_x - C_1}{C_2 - C_1}.$$

---

[1] HILGER, *Bulletin of Spectrum Analysis*, **1**, mars 1929, p. 7.

Il faut connaître le rapport $i_x - i_1 / i_2 - i_1$. On produit l'égalité d'intensité sur la plaque photographique en faisant varier l'intensité d'un faisceau.

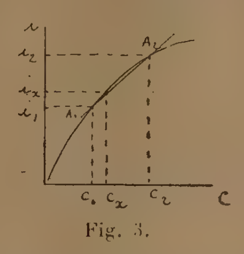


Fig. 3.

On connaît donc le rapport des intensités par l'expérience. Soient $i_2 = K i_1$; $i_x = K' i_1$, d'où :

$$\frac{i_x - i_1}{i_2 - i_1} = \frac{K' - 1}{K - 1} \quad \text{et} \quad C_x = C_1 + (C_2 - C_1)\frac{K' - 1}{K - 1}.$$

CHIMIE ORGANIQUE. — *Étude critique de l'action du chlorure de thionyle sur le phénol.* Note [1] de MM. **Charles Courtot** et **Tsé-Yei Tung**, présentée par M. Delépine.

L'action du chlorure de thionyle sur le phénol a été étudiée depuis fort longtemps [2]. Elle a été reprise récemment par Carré et Liebermann. Ces auteurs, expérimentant sans agent de condensation, arrivent par des termes intermédiaires que nous ne discuterons pas ici [3] à une équation globale identique à celle proposée antérieurement par Smiles et le Rossignol [4] qui opèrent la condensation en présence de chlorure d'aluminium

$$\text{(I)} \qquad 3C^6H^5OH + 2Cl^2SO = ClS(C^6H^4OH)^3 + SO^2 + 3ClH.$$

Or nous avons précédemment montré que l'on peut obtenir, et souvent quantitativement, les chlorures de thioniums aromatiques purement hydrocarbonés, par action d'*une molécule de chlorure de thionyle* sur trois molécules d'hydrocarbures [5] ou par action d'une molécule de carbure sur une

---

(1) Séance du 24 avril 1935.

(2) Pour l'historique de la question, voir Carré et Liebermann, *Comptes rendus*, 196, 1933, p. 275.

(3) Tsé Yei Tung, *Thèse d'Ingénieur-Docteur*, Nancy, 1935.

(4) *Chem. Soc.*, 89, 1906, p. 696 et Smiles et Baïn, *Chem. Soc.*, 91, 1907, p. 1118.

(5) Courtot et Chiffert, *Comptes rendus*, 194, 1932, p. 986.

molécule de sulfinone, en présence, dans les deux cas, de chlorure d'aluminium [1].

Notre interprétation de la réaction consiste à admettre dans une première phase, la formation de la sulfinone

$$2\,ArH + Cl^2SO = ArSOAr + 2\,ClH$$

et, dans une seconde phase, l'addition d'une nouvelle molécule de carbure, sous forme de sa combinaison chloraluminique, sur la sulfinone.

Les deux phases, à un moment donné, interfèrent et, ou bien la combinaison chloraluminique finale est scindée, sous l'action de ClH, dans le milieu réactionnel même, en $(Ar)^3SOH$ et Cl^3Al, puis l'excès de ClH salifie la base de thionium en sorte que la réaction globale s'écrit

$$\text{(II)} \qquad 3\,ArH + Cl^2SO = (Ar)^3SCl + ClH + H^2O,$$

mais l'eau formée est captée par le chlorure d'aluminium et le chlorure de thionyle n'est que peu ou pas décomposé; ou bien la combinaison chloraluminique du thionium se scinde seulement lors de l'hydrolyse du mélange, en milieu chlorhydrique, pour donner $(Ar)^3SCl + Cl^3Al$, aq. et là encore, la synthèse du thionium n'implique l'intervention que de 1^{mol} de chlorure de thionyle.

Si l'on opère *sans chlorure d'aluminium*, la base de thionium formée, en présence de ClH engendre le chlorure

$$(Ar)^3SOH + ClH = (Ar)^3SCl + H^2O;$$

mais, au fur et à mesure de sa formation, l'eau décompose le chlorure de thionyle et la réaction globale devient (I). On doit alors observer le dégagement de SO^2 seulement quelque temps après le début de la réaction et c'est effectivement ce qui a lieu.

Il résulte de tout ceci que la réaction de condensation du phénol avec le chlorure de thionyle doit être régie, sans agent de déshydratation, par la réaction (I) alors qu'en présence d'un déshydratant, elle doit suivre le schéma (II), l'eau disparaissant sous l'action du déshydratant.

Nous avons retrouvé expérimentalement les résultats analytiques de Carré et Liebermann alors qu'en répétant la condensation du phénol avec Cl^2SO en présence de Cl^3Al, le dégagement de SO^2 est très faible conformément à notre explication de formation générale de thioniums, vérifiée sur de très nombreux exemples, dans la Thèse de Tsé-Yei Tung.

---

[1] Courtot et Tung, *Comptes rendus*, **197**, 1933, p. 1227.

On peut, du reste, remplacer Cl^3Al, par un autre déshydratant, P^2O^5 par exemple. Mais la réaction se complique par suite de la formation de produits phosphorés. On isole principalement le composé

$$C^6H^5-O-\underset{O}{\overset{}{P}}\begin{matrix}\nearrow OS(C^6H^4OH)^2\\ \searrow OH\end{matrix} \qquad (f. 217\text{-}218^\circ).$$

molécule reproduite par synthèse : action de $C^6H^5-OPO-(OH)^2$ sur le chlorure de trihydroxytriphénylthionium f. = 265-268° (corr.). Le benzoate de ce dernier corps $(C^6H^5.CO.OC^6H^4)^3SCl$ fond à 53-54° (1).

Le nitrate de trihydroxytriphénylthionium fond à 169-170°. Traité par un mélange sulfonitrique (60-40), il donne un dérivé hexanitré f. = 213° (avec charbonnement).

MAGNÉTISME TERRESTRE. — *Sur quelques observations magnétiques récentes faites dans le sud et le sud-ouest de la Chine.* Note de M. **M. Burgaud**, transmise par M. Charles Maurain.

Durant le dernier hiver 1934-1935, nous eûmes l'occasion de faire, avec l'aide de l'Académie nationale de Peiping en ce qui concerne la Chine et avec l'autorisation de l'Observatoire de Kien-An et le concours du Directeur du Service géographique de l'Indo-Chine en ce qui regarde le Tonkin, quelques observations magnétiques devant permettre de suivre la variation séculaire des divers éléments magnétiques dans le sud et le sud-ouest de la Chine, au Koangtong et au Yunnan.

L'azimut des mires et un certain nombre de valeurs magnétiques furent observées au petit théodolithe-boussole Chasselon. Un magnétomètre transportable à bobines, modèle réduit, joint à un potentiomètre donnait avec étalonnage au départ et au retour de très bonnes valeurs de la déclinaison et de la composante horizontale. Un inducteur de la firme Askania appartenant à l'Académie nationale de Peiping pour la mesure de l'inclinaison et un petit récepteur de voyage pour les signaux horaires de T. S. F. complétaient l'équipement. Les stations faites s'échelonnent sur un arc de cercle de Fort-Bayard à Kun-Ming (Yunnanfu).

(1) Comparer Carré et Liebermann, *Comptes rendus*, **196**, 1933, p. 275 et Liebermann, *Comptes rendus*, **197**, 1933, p. 921.

Le tableau des valeurs observées et la carte donnant la répartition probable des isogones et des isodynames pour ces régions seront donnés prochainement.

En essayant de réduire au 1er janvier les présentes valeurs et celles observées en 1911, on aurait pour variation séculaire de la déclinaison :

Yunnanfu.	Mengtz.	Pouo-hi.	Laokai.	Yenbai.	Langson.	Pakhoi.
2′,74	2′,66	2′,6	2′,4	2′,4	2′,2	2′,0

La variation séculaire est d'autant plus prononcée qu'on avance vers l'Ouest ou le Nord-Ouest.

Ces valeurs portant sur 24 années ne sont qu'une moyenne masquant l'allure de la variation annuelle.

Des observations intermédiaires faites aux stations de répétition en 1917 indiquent en 1911 et 1917 les variations suivantes :

Yunnanfu....................................	—4′,75
Mengtz..	4′,67

On est ainsi conduit, en admettant aux autres stations une variation proportionnelle, aux valeurs approchées suivantes :

	Yunnanfu.	Pouo-hi.	Mengtz.	Lao-kai.	Yenbai.	Langson.	Pakhoi.
1911-1917...	4′,75	4′,7	—4′,67	4′,18	4′,18	3′,80	3′,51
1918-1935...	—2′,2	—1′,99	—1′,9	—1′,82	—1′,82	—1′,67	—1′,52

or elle était, pour 1911-1917, à Wuchow — 2′,50 (Kwangsi) et à l'Observatoire de Hongkong — 2′,27 pour la première période et — 0′,87 pour la seconde.

Pour la dernière décade ces chiffres semblent encore trop forts. Si l'on se reporte aux valeurs moyennes annuelles des trois observatoires de la côte de Chine : Honkong, Lukiapang-Zosè et Tsingtao, on voit que, sauf pour 1933 à Tsingtao, la variation séculaire vers l'Ouest a cessé d'augmenter et elle esquisse un mouvement vers l'Est :

	Hongkong.	Diff.	Lukiapang.	Diff.	Tsingtao.	Diff.
	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	′ ″
1929.....			—3.35.55			
1930.....	—0.43.46		—3.35.80	—0.25	—4.32.75	
1931.....	—0.43.31	+0.15	3.35.54	+0.26	4.32. 8	+0.67
1932.....	—0.43.27	+0.04	—3.35.09	+0.45	—4.32. 8	—0. 0
1933.....	—0.42.58	+0.29	3.35.16	—0. 7	—4.34. 9	—2. 0

Les derniers mois de 1934, cette tendance semble s'accuser à l'Obser-

vatoire de Zosè. Il est donc possible que l'aiguille aimantée ait atteint sa plus grande élongation vers l'Ouest pour les stations du centre et du sud de la Chine, et qu'un renversement de la variation séculaire tende à se produire. S'il en est ainsi les lignes agoniques de l'Annam et du Thibet auraient atteint leur écart maximum vers le Sud et vers l'Ouest et le grand ovale sino-japonais qui s'était ouvert au Sud-Ouest dans les premières années de ce siècle pourrait être en voie de se refermer lentement.

GÉNÉTIQUE. — *Étude génétique et cytologique des formes tendroïdes apparues dans la descendance de l'hybride intergénérique* Ægilops triuncialis *L.* × Triticum durum *Desf.* Note de MM. **Pierre Laumont** et **Marc Simonet**, présentée par M. Louis Blaringhem.

Le croisement *Ægylops triuncialis* L. var. *typica* × *Triticum durum* Desf. var. *erythromelan* Körn. réalisé par l'un de nous, à la Station d'Amélioration des Plantes de Maison-Carrée (Alger), en 1929 (¹), a donné une (F_1) vigoureuse, bien développée, présentant des caractères intermédiaires — plutôt *ægylopiformes* — entre ceux des parents.

Au cours de la (F_2), de dominance *ægylopiforme* accusée [39 individus dont 1 ressemblant à la (F_1)], sont apparus 2 types *speltoïdes*, peu fertiles; aucun retour aux parents n'a été constaté.

La (F_3), composée de 95 plantes est caractérisée par l'apparition, non encore signalée jusqu'ici, de formes plus ou moins proches des Blés tendres (*T. vulgare*) par l'aspect général des plantes : hauteur et grosseur des chaumes, figuration et ornementation des glumes, contexture des grains, etc., et appelées pour cette raison : *tendroïdes*. Le rapport de ségrégation s'établit à cette génération de la façon suivante : 10 *tendroïdes*, 17 *durelloïdes* et 68 *ægylopiformes*.

La (F_4), composée à la récolte de 1257 individus, présente une ségrégation extrêmement large : 143 *tendroïdes*, 47 *speltoïdes*, 55 *durelloïdes* et 1012 *ægylopiformes*.

La (F_5), faute de place, a été surtout consacrée à la descendance des types *ægylopiformes* les plus caractéristiques et des formes *tendroïdes*, *speltoïdes* et *durelloïdes*.

La formation de types *speltoïdes* et *tendroïdes* en (F_2) et en (F_3) était

(¹) P. Laumont, *Bull. Soc. Hist. Nat. Afr. du Nord*, 23, 1932, p. 123-125.

inattendue. Il est peu probable qu'elle ait pu provenir de fécondations croisées, évidemment toujours possibles, bien que rarement rencontrées dans nos cultures à Maison-Carrée (1 cas observé sur 9000 lignées en étude de 1907 à 1934). Cependant, pour les éviter et ne pouvant isoler chaque épi en raison de l'abondance de notre matériel, nous avons volontairement reculé les semailles des hybrides après celle des derniers Blés, ce décalage efficace s'est traduit par une floraison tardive qui a eu lieu, en général, à la fin de celle des Blés durs et, en tout cas, bien après celle des Blés tendres.

Génétiquement, l'apparition de ces formes aberrantes pouvait s'expliquer par des recombinaisons factorielles; leur étude cytologique a confirmé le raisonnement génétique en mettant en évidence l'existence, parmi elles, de formes ayant la même formule chromosomique que le Blé tendre ($2n=42$).

L'étude caryologique, faite par l'un de nous au Laboratoire des Établissements Vilmorin, à Verrières-le-Buisson (S.-et-O.), a montré que les deux géniteurs, bien que très différents morphologiquement, sont à $2n=28$; la (F_1), non étudiée, devait être également à $2n=28$ (♀ $n=14$ et ♂ $n=14$). En (F_4), il existe déjà une variation chromosomique étendue, retrouvée en (F_5) et (F_6) renfermant des individus à $2n=28$ et 29, à $2n=41$, 42, 43, 44, 45 et 46.

Par groupes morphologiques, les résultats sont les suivants : les *durelloïdes* sont à $2n=28$-29 (7941-*g*-15); les *ægylopiformes* sont à $2n=45$-46 en (F_4) et (F_5) (7946-*h* et *h*-26); les *speltoïdes* sont les uns à $2n=43$-46 en (F_4) et $2n=42$-44 en (F_5) (7942-*b* et 7942-*b*-5), les autres à $2n=41$-42-43 en (F_6) (7942-*b*-10, 24 et 33); les *tendroïdes* sont à $2n=41$-42 en (F_4) (7944-*b* et 7949-*g*), à $2n=42$ en (F_5) (7944-*b*-49 et 75), à $2n=42$ en (F_6) (7944-*b*-33, 49, 75 et 100) ou 41-42 (7949-*g*-29 et 50).

Ces faits montrent que cytologiquement les types *durelloïdes* ($2n=28$-29), *speltoïdes* ($2n=46$-44-43-42-41) et *tendroïdes* ($2n=41$-42) ont une même formule chromosomique que celle des types morphologiques auxquels ils se rapportent, et lorsqu'elle en diffère reste très voisine : *T. durum* ($2n=28$), *T. spelta* et *T. vulgare* ($2n=42$). Le nombre des chromosomes trouvés chez les *ægylopiformes* ($2n=46$) diffère de celui rencontré par E. Tschermak et J. Percival chez leurs *Ægylotricum* stabilisés à $2n=56$ (à la suite d'un doublement du nombre chromosomique des deux géniteurs).

Dans le cas présent, les résultats que nous avons obtenus montrent que l'accroissement observé du nombre des chromosomes ne doit résulter que du doublement de l'une seulement, au lieu des deux garnitures chromo-

somiques parentales (♀ $n=28$ et ♂ $n=14$, ou inversement). Mais, J. Percival (1) a aussi signalé qu'à la méiose de la (F_1) de son hybride *Æ. triuncialis* × *T. durum*, il se formait 1 à 6 éléments bivalents et 26 à 16 univalents avec clivage et souvent division de ces derniers à l'anaphase hétérotypique; la métaphase homéotypique étant normalement équationnelle, des chromosomes monovalents sont donc susceptibles de se diviser deux fois, au lieu d'une, d'où formation de gamètes à chromosomes surnuméraires. L'accroissement que nous avons observé de $2n=28$ à $2n=42$ et $2n=46$, n'a vraissemblablement pas d'autre origine; une régularisation plus ou moins rapide au cours des générations successives s'établissant par élimination de chromosomes jusqu'à formation des types fixés morphologiquement et cytologiquement (*tendroïdes* 7944-*b*-49 et 75).

L'apparition de types *tendroïdes* stabilisés analogues au *T. vulgare* jette un jour nouveau sur le problème de l'origine du Blé tendre en précisant l'hypothèse, déjà émise, mais jamais vérifiée, du rôle qu'auraient joué dans sa formation certaines espèces d'*Ægilops* et les blés de la série *durum* ($2n=28$).

Les produits récemment obtenus par Mlle Dusseau (2), par MM. Miège et l'un de nous (3), de types régressifs *durum* ($2n=28$), à partir de l'entrecroisement de deux *T. vulgare* ($2n=42$), pouvaient déjà être considérés comme des arguments favorables. Nos expériences, en créant synthétiquement des types tendroïdes fixes et semblables au Froment, tout en confirmant l'origine hybridogène du *T. vulgare*, précisent en même temps la probabilité de cette parenté.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Recherches sur la nature chimique de l'haptène fixateur lipoïdique des bacilles tuberculeux tués par la chaleur.* Note de M. **Michel-A. Machebœuf**, Mmes **Georgette Lévy** et **Marguerite Faure**, présentée par M. Gabriel Bertrand.

Nous avons cherché à isoler la substance qui confère à certains extraits lipidiques des bacilles la propriété de fixer l'alexine en présence de sérums d'animaux ou d'hommes tuberculeux. En utilisant une technique que nous

(1) *Journ. of Genetics*, **22**, 1930, p. 201-278.
(2) *Comptes Rendus*, **194**, 1932, p. 1380-1382.
(3) E. Miège et M. Simonet, *Comptes rendus*, **198**, 1933, p. 1751-1758.

avons déjà décrite ([1]), nous avons pu préparer une grande quantité de fraction lipidique haptène brute en partant de grandes quantités de bacilles (souche bovine) tués par la chaleur. Cette fraction brute, séparée des autres lipides grâce à sa très faible solubilité dans l'acétone refroidi, fut la matière première du présent travail; son activité haptène était déjà très élevée.

Nous avons soumis cette fraction à divers fractionnements méthodiques et, grâce à une différence assez notable des solubilités dans l'alcool méthylique tiède (+ 40°C.), puis dans l'alcool méthylique refroidi (0°C.), nous avons pu obtenir trois fractions très différentes :

	Fraction I la moins soluble à + 40° C.	Fraction II intermédiaire, plus soluble à 40°, très peu soluble à 0°.	Fraction III la plus soluble à 0°.
Poids pour 100 de fraction brute.......	36	12	51.
Phosphore pour 100....................	3,9	2,7	3,8
Azote pour 100	0,25	1,12	1,9
Activités, en unités arbitraires.........	1000	400	30

La fraction intermédiaire II, la moins abondante, est probablement un mélange de parties des fractions I et III avec un peu d'impuretés non phosphorées et inactives.

La fraction I, si active comme haptène de fixation d'alexine, est absolument inactive comme haptène de précipitation : c'est ainsi qu'un sol aqueux concentré contenant par centimètre cube 2^{mg} de cette fraction ne donne aucune précipitation avec un quelconque sérum de tuberculeux, alors qu'en présence de ce même sérum, ce même sol dilué de 1 à 2500 et utilisé à la dose de $0^{cm^3},25$ fixe encore 2,5 doses minima d'alexine ([2]).

La fraction I est également inactive comme antigène : car si on l'injecte au lapin elle ne provoque pas la formation d'anticorps de déviation ni de précipitation. *Les haptènes lipoïdiques de la fraction I sont donc des haptènes de fixation au sens le plus strict.*

Nous avons pu les purifier encore en les précipitant à basse tempé-

---

([1]) M. Macheboeuf, G. Lévy, N. Fethké, J. Dieryck et A. Bonnefoi, *Annales de l'Institut Pasteur*, 52, 1934, p. 277; M. Macheboeuf, G. Lévy et Chambaz, *ibid.*, 53, 1934, p. 591.

([2]) Réactions effectuées avec $0^{cm^3},25$ d'une suspension de globules rouges de mouton correspondant au sang dilué au dixième.

rature (0°C.) par addition à leur solution chloroformique concentrée d'un volume égal d'alcool méthylique refroidi. La fraction purifiée ainsi obtenue présente une activité haptène extrêmement élevée (1500) cette fraction purifiée contient 3,4 pour 100 de phosphore et seulement de faibles traces d'azote. Nous avons pu éliminer encore quelques traces d'impuretés azotées grâce à un nouveau fractionnement méthodique dans l'alcool méthylique, la teneur en azote fut alors inférieure à 0,15 pour 100. Au cours de tous ces essais, ce fut toujours d'ailleurs la fraction la plus pauvre en azote qui fut la plus active; il est donc vraisemblable que la substance active est une substance non azotée.

La fraction active purifiée est très soluble dans le chloroforme, soluble dans l'éther, presque insoluble dans l'acétone et très peu soluble dans l'alcool méthylique froid ou tiède. Elle est assez hygroscopique et, mise en présence d'eau, elle se gonfle rapidement, puis se met en sol colloïdal stable à grains très fins. Ce sont ces sols qui, même très dilués, présentent la propriété de fixer l'alexine en présence de sérums de tuberculeux.

L'affinité pour l'eau des substances actives est tellement grande que l'eau, agitée avec leur solution éthérée les extrait rapidement. Ce passage de l'éther dans l'eau se fait moins bien si la phase aqueuse est à un pH inférieur à 7. En milieu alcalin, l'activité haptène est détruite assez rapidement; elle disparaît aussi, mais plus lentement si le milieu est fortement acide ($pH < 3$).

La fraction III, soluble dans l'alcool méthylique refroidi (0°C.) est inactive comme haptène (de précipitation et de fixation) elle est constituée par des phosphatides (phosphore pour 100, 3,8; azote pour 100, 1,9; acides gras pour 100, 70). Elle contient d'ailleurs la presque totalité des phosphoaminolipides bacillaires et ceci prouve que *ce n'est pas aux phosphoaminolipides qu'il faut rapporter comme on l'avait cru l'activité haptène des lipides des bacilles tuberculeux.*

Notre fraction active purifiée, malgré sa très haute activité n'est probablement pas encore une substance pure, mais comme elle rassemble pratiquement la totalité de l'activité haptène de fixation des lipides bacillaires, on peut en tout cas dire que cette activité n'appartient pas à divers groupes de substances lipoïdiques, mais à un seul groupe très limité de ces substances ou peut-être même à une seule substance.

IMMUNOLOGIE. — *De l'immunisation locale de la peau contre le sarcome de la souris.* Note de MM. **Alexandre Besredka** et **Ludwik Gross**, présentée par M. Félix Mesnil.

Nous avons montré ([1]) que le sarcome, inoculé à des souris dans la peau, est susceptible de se résorber, après avoir donné naissance à une tumeur de même nature ([2]). De telles souris, dès qu'elles sont complètement débarrassées de leur tumeur intracutanée, ne réagissent plus lors d'une nouvelle inoculation : qu'on leur introduise une émulsion sarcomateuse dans la peau ou sous la peau, elles demeurent réfractaires, à la condition que la dose inoculée ne soit pas massive. En rapprochant ce fait de celui observé par l'un de nous ([3]) dans le charbon, nous avons émis l'idée que l'immunité antisarcomateuse de la souris, tout comme l'immunité anticharbonneuse, est due, en grande partie, au moins, à la cuti-vaccination, c'est-à-dire à la vaccination locale de la peau.

Depuis, des expériences portant sur les inoculations pratiquées dans la cavité péritonéale nous ont montré que dans le sarcome, comme dans l'infection charbonneuse, les animaux ayant bénéficié de la cuti-vaccination deviennent également réfractaires à l'inoculation de sarcome dans le péritoine.

Comme il ressort de nos expériences préliminaires, il suffit d'injecter à des souris dans la cavité péritonéale une goutte d'émulsion sarcomateuse, diluée à 10-20 pour 100, pour provoquer la mort certaine dans les 15-25 jours qui suivent. La mort dans ce cas est due à une sarcomatose péritonéale généralisée. A l'autopsie, on trouve, soit de petites granulations sarcomateuses, extrêmement nombreuses au niveau du mesentère et un exsudat péritonéal, abondant ($2\text{-}4^{cm^3}$), parfois sanguinolent, riche en globules blancs, soit deux-trois grandes tumeurs au milieu d'un exsudat peu abondant.

Fait à noter, dans la plupart des cas, on constate, juste au point où l'aiguille inoculatrice a traversé les parois, une petite tumeur sarcomateuse dans la peau, et une autre au niveau de la paroi abdominale, c'est-à-dire

---

([1]) *Comptes rendus*, 200, 1935, p. 175 et p. 790.

([2]) Le même phénomène de résorption a été observé par nous avec le sarcome dit S. 37; nous y reviendrons ultérieurement.

([3]) A. Besredka, *Annales de l'Institut Pasteur*, 35, 1921, p. 421.

là où les cellules se trouvaient souillées par le virus sarcomateux à l'aller ou au retour, ce qui rapproche le sarcome de l'infection charbonneuse. Faisons remarquer que des résultats identiques ont été obtenus chez des souris auxquelles nous avons inoculé dans le péritoine, au lieu d'émulsion de tumeur, du liquide d'ascite sarcomateux, fortement dilué ($0^{cm^3},5$ à 1 pour 1000).

Voici une de ces expériences :

Le 15 janvier, sur six souris inoculées dans la peau, les tumeurs intracutanées, ayant fait leur apparition vers le 22 janvier, se sont résorbées chez trois d'entre elles, le 10 février. Le 1er mars, on inocule dans le péritoine de ces dernières $0^{cm^3},25$ d'une émulsion sarcomateuse à 20 pour 100. Ces trois souris demeurent indemnes; trois souris témoins, inoculées dans les mêmes conditions, succombent dans les 20 jours d'une sarcomatose péritonéale généralisée.

Plusieurs auteurs ayant déclaré que l'émulsion d'organes normaux ou de tissu embryonnaire normal sont capables de préserver les souris contre l'inoculation de tumeurs malignes, nous avons institué dans cet ordre d'idées toute une série d'expériences. En voici deux :

A. Le 4 mars, six souris reçoivent dans le péritoine $0^{cm^3},3$ d'une émulsion chargée d'organes (foie, rate, reins). Le 20 mars, on leur inocule dans le péritoine $0^{cm^3},25$ d'une émulsion sarcomateuse à 20 pour 100. Toutes ces souris, ainsi que cinq souris témoins, inoculées dans les mêmes conditions, succombent dans les deux semaines d'une sarcomatose péritonéale généralisée.

B. Le 6 avril, sept souris sont préparées, au moyen de tissu embryonnaire, par la voie intracutanée. Le 10 avril, on leur inocule, ainsi qu'à un nombre égal de témoins, sous la peau, $0^{cm^3},25$ d'une émulsion sarcomateuse à 20 pour 100. Dans la semaine qui suit, toutes ces souris ont présenté des tumeurs.

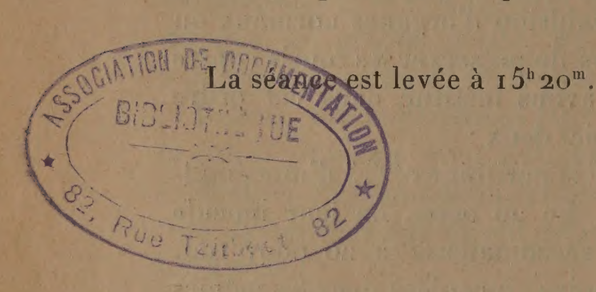
Nous reviendrons sur l'effet protecteur que certains attribuent aux organes et au tissu embryonnaire normaux. Ici nous nous contentons d'observer que si, dans quelques cas rares, ces tissus, injectés dans la peau, semblent conférer une sorte d'immunité partielle contre l'inoculation péritonéale, jamais nous n'avons pu constater un effet de cet ordre chez les souris auxquelles le sarcome avait été inoculé sous la peau.

Contrairement à ce qui a été avancé par certains auteurs, nous n'avons pas réussi à conférer l'immunité en injectant une émulsion d'un adénocarcinome spontané avirulent de la souris. Les résultats de l'immunisation

ont été également négatifs lorsque nous préparions les souris avec des doses de sarcome ne donnant pas lieu à des tumeurs intracutanées : dans tous ces cas, les souris se comportaient, lors des inoculations ultérieures, comme des animaux neufs.

Pour nous résumer, l'immunité ne saurait être réalisée qu'à la condition : *a*, que la tumeur fraîchement préparée soit injectée strictement dans la peau; *b*, que la dose injectée soit faible, mais suffisante pour provoquer une tumeur intracutanée; *c*, que cette tumeur intracutanée soit complètement résorbée.

De l'ensemble de ces expériences et de celles relatées antérieurement, portant sur plus de quinze cents souris, il ressort que, chez la souris, la vaccination locale par la voie intracutanée est susceptible de créer une immunité certaine vis-à-vis du sarcome inoculé dans la peau, sous la peau ou dans le péritoine, et que cette immunité est solide et spécifique.



La séance est levée à 15h20m.

E. P.